第5章. 後半 pp. 168-184.

****

数値計算法　　　演習問題　10

****

10.01　台形公式で　S[n]の結果を利用して　S[2n]を求める方法を説明しなさい。

10.02　台形公式の誤差　error[n]=S-S[n]　と　Δx　の関係を説明しなさい。

　S1[n] = { 4 S[2n] - S[n] } / 3 の関係を導き説明しなさい。

10.03　補間と補外との違いはなにか？

10.04　Level=2 の Ronburg積分公式

　　S2[n] = { 16 S1[2n] - S1[n] } / 15

を導き説明しなさい。

さらに、その公式を任意のLevelの値に一般化しなさい。

10.05　1 から　n までの整数の m 乗の総和　S[m](n) の値を求めなさい。

10.06　xの２乗の放物線の区間[0,1]の定積分の値を、区間をn等分して、

解析的に、その面積を求めなさい。

その誤差がnの値にどう関係するかを説明しなさい。

Richardson 補外を適用して、その誤差がどうなるか説明しなさい。

****

10.01 台形公式で $S[n]$ の結果を利用して $S[2n]$ を求める.

$S=\int_a^b f(x)\,dx$ を台形公式で計算する. まず区間 $[a,b]$ を n 等分して,

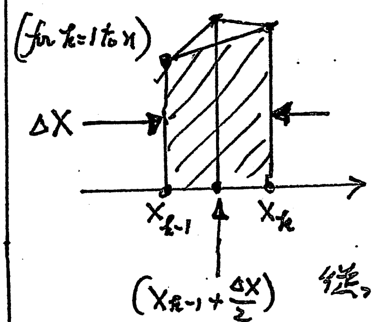
$\Delta x=\dfrac{(b-a)}{n}$ として. $S[n]=(\Delta x)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]$ を求める.

$x_k=a+(k)(\Delta x)$ for $(k=0,1,2,\cdots,n)$ である.

次に $S[2n]$ を求めたい (台形が2分割されて. 各点で2つにする.)

$$S[2n]=\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(x_{k-1})+f\left(x_{k-1}+\frac{\Delta x}{2}\right)+f\left(x_{k-1}+\frac{\Delta x}{2}\right)+f(x_k)\right]$$ とする.

(for $k=1$ to n)

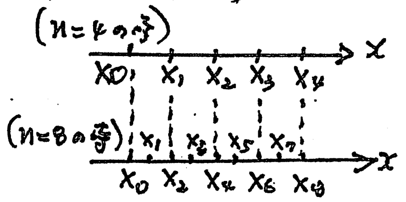


$$S[2n]=\frac{1}{2}(\Delta x)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]+\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}f\left(x_{k-1}+\frac{\Delta x}{2}\right)$$ となる.

従って. $S[2n]=\frac{1}{2}S[n]+\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}f\left(x_{k-1}+\frac{\Delta x}{2}\right)$ となる.

ここで 小区間の中間点は..... $n\to 2n$ として. $\Delta x\Rightarrow\frac{\Delta x}{2}$ として. $x_k\Rightarrow x_{2k}$ とすると、

$\left(x_{k-1}+\frac{\Delta x}{2}\right)\Rightarrow x_{2k-1}$ の点に対応する.



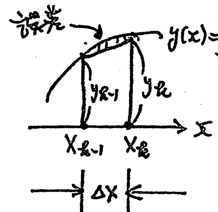
$(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)\Rightarrow(x_0,x_2,x_4,x_6,x_8)$ に対応し.
$\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},\ x_1+\frac{\Delta x}{2},\ x_2+\frac{\Delta x}{2},\ x_3+\frac{\Delta x}{2}\right)\Rightarrow(x_1,x_3,x_5,x_7)$ に対応する.

(See pp. 169-171)

実際に数値計算で求める場合. この台形公式 Algorithm の方が. 合成Simpson方式より効率が良い

10.02 台形公式の誤差について (p.174)

$$(\text{誤差})=\int_{x_{k-1}}^{x_k}y(x)\,dx-\frac{\Delta x}{2}\left[y_{k-1}+y_k\right]\simeq(\Delta x)^3$$ に比例する!?



で近似する. $(\text{誤差})=\frac{A}{3}\left[x_k^3-x_{k-1}^3\right]+\frac{B}{2}\left[x_k^2-x_{k-1}^2\right]+C\left[x_k-x_{k-1}\right]$

$-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})\left[A\left[x_k^2+x_{k-1}^2\right]+B\left[x_k+x_{k-1}\right]+2C\right]$.

$(\text{誤差})=\left(\frac{A}{6}\right)\left[2(x_k-x_{k-1})(x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2)-3(x_k-x_{k-1})(x_k^2+x_{k-1}^2)\right]$

($\frac{B}{2}$の項と Cの項はゼロになる!)

$(\text{誤差})=\left(\frac{A}{6}\right)(x_k-x_{k-1})\left[2x_kx_{k-1}-x_k^2-x_{k-1}^2\right]=-\left(\frac{A}{6}\right)(x_k-x_{k-1})^3=-\left(\frac{A}{6}\right)\Delta x^3$ となる!!

台形1個ぶんの誤差は $-\left(\frac{A}{6}\right)\Delta x^3$ となる. $n=\left(\frac{b-a}{\Delta x}\right)$ 個あると、誤差は $-\left(\frac{A}{6}\right)(b-a)\Delta x^2$ となる.

$S=\int_a^b f(x)\,dx$ として. $S[n]=(\Delta x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]$ として. $\boxed{S=S[n]-(H)\Delta x^2}$ と書ける.

Richardson補外 そこで $\begin{cases}S=S[n]-(H)\Delta x^2\\ S=S[2n]-(H)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\end{cases}$ となります!!

(|| 合成Simpson方式と同等)

$4S=4S[2n]-(H)\Delta x^2$

$S=S[n]-(H)\Delta x^2$

$3S=4S[2n]-S[n]$

See p.175

$\boxed{S=\frac{4}{3}S[2n]-\frac{1}{3}S[n]}$ となる

たとえば (See 9.03) $\pi=\int_0^1\frac{4dx}{1+x^2}$ の評価で

$\begin{cases}S[8]=3.138988\ (2\text{桁の精度})\\ S[16]=3.140942\ (3\text{桁の精度})\end{cases}$ だった!? $S=3.141592651$ (8桁精度) を得る!!

See pp. 174〜175.

10.03 補外とは？ Richardson補外とは？

$y=f(x)$において、$x=0$でのyの値を求めたいが、$y_1=f(x_1)$ $y_2=f(x_2)$の値しかない場合、$f(x)=Ax+B$でこの場合近似して、$x=0$の時の$f(x)$の値Bを求める（近似）する事を補外という。3点の値がわかっていれば$f(x)$を2次方程式で近似する。n点の値がわかっていれば、$f(x)$を$(n-1)$次方程式で近似し、$f(0)$を求める。Richardson補外も同様である。

$S[2]$, $S[4]$, $S[8]$, ‥ と、Sを台形公式で近似して、

$$
\left(
\begin{array}{lll}
S[2] \text{ を } & x_1=\frac{b-a}{2} & y_1=S[2] \\
S[4] \text{ を } & x_2=\frac{b-a}{4} & y_2=S[4] \\
S[8] \text{ を } & x_3=\frac{b-a}{8} & y_3=S[8] \\
\vdots & & \vdots \\
S[2^m] \text{ を } & x_m=\frac{b-a}{2} & y_m=S[2^m]
\end{array}
\right)
$$

として、$y=f(x)$を$(m-1)$次方程式で近似して、$y_0=f(0)$を求める…

10.04 ロンバーグ積分の定義

まず台形公式の計算結果を $S_0[n]=S[n]$ と書く。（Level 0のロンバーグ積分と呼ぶ）
そして、Richardson補外を $S_1[n]=\frac{1}{3}[4S_0[2n]-S_0[n]]$ と書く。（Level 1のロンバーグ積分と呼ぶ）
今、$S_0[n]$, $S_0[2n]$, $S_0[4n]$の値が求まっている時、
$S_1[2n]=\frac{1}{3}[4S_0[4n]-S_0[2n]]$ も求める事ができる。

Richardson補外の誤差は
$$\left(\begin{array}{l} S=S[n]-(A)\Delta x^2 \text{ として、} \\ S=\frac{4}{3}S[2n]-\frac{1}{3}S[n] \text{ を導いた。}\end{array}\right)$$

今度はさらに精度を上げて、$S=S[n]-A\Delta x^2-B\Delta x^4$として、検討してみる。

$$\left(\begin{array}{l} S=S[2n]-\frac{1}{4}A\Delta x^2-\frac{B}{16}\Delta x^4 \\ S=S[4n]-\frac{1}{16}A\Delta x^2-\frac{B}{256}\Delta x^4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} S=S[n]-A\Delta x^2-B\Delta x^4 \\ 16S=16S[2n]-4A\Delta x^2-B\Delta x^4 \\ 256S=256S[4n]-16A\Delta x^2-B\Delta x^4 \end{array}\right)
\rightarrow
\left(\begin{array}{l} 15S=16S[2n]-S[n]-3A\Delta x^2 \\ 255S=256S[4n]-S[n]-15A\Delta x^2 \end{array}\right)$$

$$75S=80S[2n]-5S[n]-15A\Delta x^2$$

$$180S=256S[4n]-80S[2n]+4S[n]$$
$$45S=64S[4n]-20S[2n]+S[n]$$

ここで、
$$16S_1[2n]=\frac{16}{3}[4S_0[4n]-S_0[2n]]$$
$$\rightarrow \quad S_1[n]=\frac{1}{3}[4S_0[2n]-S_0[n]]$$

$$16S_1[2n]-S_1[n]=\frac{1}{3}\{64S_0[4n]-20S_0[2n]+S_0[n]\}=\frac{45S}{3}=15S \text{ となる!!}$$

（Level 2の Romberg積分の定義）
$$\boxed{S_2(n)=\frac{1}{15}[16S_1[2n]-S_1[n]]}$$

と書くと、$S\sim S_2(n)$となる!! p.180 下図参照

ロンバーグ積分の一般化

$$S_0[n]=\left(\frac{(b-a)}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right] \text{ とすると、}$$

$$S_l[n]=\frac{(4^l)S_{l-1}[2n]-S_{l-1}[n]}{(4^l-1)} \text{ となる!!}$$ (See p.181)

10.05 1から n 迄の整数の・乗の総和 $S_m(n)$ を求める。

① $S_1(n)=\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ を導く!

② $S_2(n)=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を導く!

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$
$$n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$$
$$\vdots$$
$$3^2-2^2=2(2)+1$$
$$+)\quad 2^2-1^2=2(1)+1$$

$(n+1)^2-1=(2)S_1(n)+n$ となる。

$S_1(n)=\frac{1}{2}\left[(n+1)^2-1-n\right]=\frac{1}{2}n(n+1)$ となる。

まず $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ に注目する

$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ より

$(n+1)^3-1=(3)S_2(n)+(3)S_1(n)+n$ となる!!

$$S_2(n)=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-n-(3)\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{(n+1)}{6}\left[2(n+1)^2-2-n\right]=\frac{n}{6}(n+1)(2n+$$

③ $S_3(n)=\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$ を求める.

$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

$(n+1)^4-1=(4)S_3(n)+(6)S_2(n)+(4)S_1(n)+n$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

アルキメデスのピラミッドという

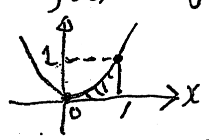
$$S_3(n)=\frac{1}{4}\left[(n+1)^4-(1+n)-(6)\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-(4)\left(\frac{n}{2}\right)(n+1)\right]$$

$$S_3(n)=\frac{1}{4}(n+1)\left[n^3+3n^2+3n+1-(n+1)-(2n^2+n)-2n\right]$$

$$S_3(n)=\frac{1}{4}(n+1)(n^3+n^2)=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

10.06 台形公式の誤差の計算.

$f(x)=x^2$ の例



$$S=\int_0^1 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

$[a,b]=[0,1]$ で $\Delta x=\frac{1}{n}$ として、$x_k=\frac{k}{n}$

$$S_0[n]=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{n}\right)^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}{2}\right]$$

$$S_0[n]=\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)^2+k^2\right]=\frac{1}{2n^3}\left[\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^2\right]$$

$$S_0[n]=\frac{1}{12n^3}\left[(n-1)n(2n-1)+n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$S_0[n]=\frac{1}{12n^2}\left[2n^2-3n+1+2n^2+3n+1\right]=\frac{1}{6n^2}\left[2n^2+1\right]$$

$$S_0[n]=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n^2}$$

誤差は n^2 に反比例する.
$(\Delta x)^2$ に比例する

Richardson 補外を使うと.

$$S_0[2n]=\frac{1}{3}+\frac{1}{24n^2}$$

p.183 章末問題[4]

$$S_1[n]=\frac{4S_0[2n]-S_0[n]}{3}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{24n^2}\right)-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6n^2}\right]$$

$$S_1[n]=\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{18}\right)\frac{1}{n^2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=S$$

(誤差) $=S-S_1[n]=0$ となる!