第5章前半 pp. 151-167

****

数値計算法　　　演習問題　09

****

9.01　区間[a,b]の範囲で定義される関数　y=f(x)　の、
定積分を求める３つの方法を比較説明せよ。

①区分求積法

②台形求積法

③Simpson求積法

9.02　①３点　(a,A),(b,B),(c,C)を通る二次方程式を求めよ

②区間　[a,c]　で定義されるこの二次方程式の定積分を求めよ。

9.03　区間　[0,1]　で定義される 関数

f(x)=4/(1+x*x)

の定積分の値を、

次の３つの求積法の計算Algorithmをもとに、

C-source program で coding して、 数値計算的に求めよ。

①区分求積法

②台形求積法

③Simpson求積法

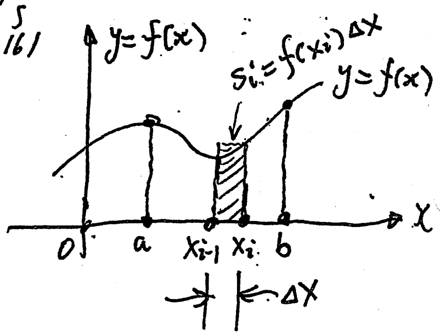
④また、この定積分の値を解析的に求めよ。

****

9.01 | $y=f(x)$ の関数で区間 $[a,b]$ で定積分を求める。　数値計算法ノート⑤ pp.151～167

① 区分求積法。区間 $[a,b]$ を n 等分して小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ を定義する。

pp.160～161　$x_0=a$, $x_n=b$ とする。$\Delta x=(b-a)/n$; $x_i=x_{i-1}+\Delta x$ $(i=1,2,\cdots,n)$

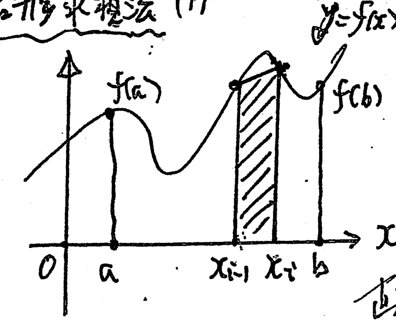


（小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ で $y=f(x)$ と x 軸がかこむ面積を S_i とする。$S_i \approx f(x_i)\Delta x$ で近似する方法を区分求積法と呼ぶ。）

（S_i を1次近似している。）　$S=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} S_i$

$S_K=\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right](\Delta x)$

② 台形求積法 (pp.162～164)



$S_i=\left[\dfrac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right](\Delta x)$ で近似する方法を台形求積法と呼ぶ。

（S_i を2次近似している。）

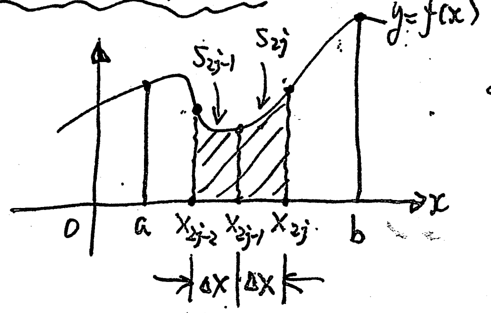
同様に $S_D=\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i=\left[\dfrac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]\cdot\Delta x$ となる。

直感的に S_D の方が S_K より精度が良いはず…

しかし、その差は、$S_K-S_D=\frac{1}{2}[f(b)-f(a)](\Delta x)$ となる。

（$n\to\infty$ とすると、$\Delta x\to 0$ となり $S_K \approx S_D$ となる…）

③ シンプソン求積法 (pp.164～167)



$n=2m$ (偶数) とする。$\Delta x=\left(\dfrac{b-a}{n}\right)=\left(\dfrac{b-a}{2m}\right)$ となる。

$S=\sum_{i=1}^{n} S_i=\sum_{j=1}^{m}(S_{2j-1}+S_{2j})$ となる。

そこで3点 $\left\{\begin{array}{l}[x_{2j-2}, f(x_{2j-2})]\\ [x_{2j-1}, f(x_{2j-1})]\\ [x_{2j}, f(x_{2j})]\end{array}\right\}$ を通る2次方程式　for $(j=1$ to $m)$

For $j=1$ to m（$j=1$ から $j=m$ まで）: $y=A_jx^2+B_jx+C_j$ を考える　そして…

$y=A_jx^2+B_jx+C_j$ と x 軸でかこんだ面積を $(S_{2j-1}+S_{2j})$ とする！

計算は大変めんどうだが（結果は単純で…）$(S_{2j-1}+S_{2j})=\left(\dfrac{\Delta x}{3}\right)[f(x_{2j-2})+4f(x_{2j-1})+f(x_{2j})]$ となる!!

従って、$S=\sum_{j=1}^{m}(S_{2j-1}+S_{2j})=\left(\dfrac{\Delta x}{3}\right)\sum_{j=1}^{m}[f(x_{2j-2})+4f(x_{2j-1})+f(x_{2j})]$

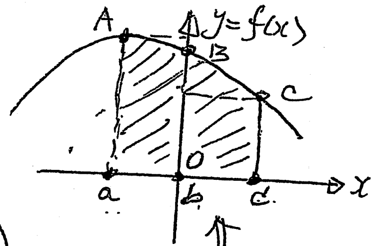
$S=[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+\cdots$
$+\cdots+2f(x_{2m-2})+4f(x_{2m-1})+f(x_{2m})]\cdot\left(\dfrac{\Delta x}{3}\right)$　(p.167参照)

$S=\left(\dfrac{\Delta x}{3}\right)\left[f(x_0)+f(x_{2m})+(4)\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1})+(2)\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j})\right]$ となる!!

9.02 ① 3点 $(a,A)\,(b,B)\,(c,C)$ を通る二次方程式を求める.

$$y=f(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}A+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}B+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}C$$ となる!!

ここで $a=-\Delta X,\ b=0,\ c=\Delta X$ とすると.



$$\left(\begin{aligned}(a-b)(a-c)&=(-\Delta X)(-2\Delta X)=2(\Delta X)^2\\(b-a)(b-c)&=(\Delta X)(-\Delta X)=-(\Delta X)^2\\(c-a)(c-b)&=(2\Delta X)(\Delta X)=2(\Delta X)^2\end{aligned}\right)$$

$$\left(\begin{aligned}(x-b)(x-c)&=(x)(x-\Delta X)=x^2-x\Delta X\\(x-a)(x-c)&=(x+\Delta X)(x-\Delta X)=x^2-(\Delta X)^2\\(x-a)(x-b)&=(x+\Delta X)x=x^2+x\Delta X\end{aligned}\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)=\frac{\Delta X}{3}\left[A+4B+C\right]}$$ を導く!

$$y=f(x)=\frac{1}{(2)(\Delta X)^2}\left[(x^2-x\Delta X)A-(2)(x^2-(\Delta X)^2)B+(x^2+x\Delta X)C\right]$$

$$y=f(x)=\frac{1}{(2)(\Delta X)^2}\left[(A-2B+C)x^2-(A+C)x\Delta x+(2)(\Delta x)^2B\right]$$

② $[a,c]$ の区間での定積分を求める. (pp. 165〜167 参照)

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{(2)(\Delta X)^2}\left[\frac{1}{3}(A-2B+C)X^3\cancel{-\frac{1}{2}(A+C)X^2\Delta X}^{\,0}+(2)(\Delta X)^2Bx\right]_{-\Delta X}^{\Delta X}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{(6)(\Delta X)^2}\left[(A-2B+C)(2)(\Delta X)^3+(6)(\Delta X)^2(B)(2\Delta X)\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left(\frac{\Delta X}{3}\right)\left[A-2B+C+6B\right]=\left(\frac{\Delta X}{3}\right)\left[A+4B+C\right]$$ となる!

9.03 区間 $[0,1]$ で $f(x)=4/(1+x^2)$ の値を求める.

① 区分求積法で数値計算的に、求める. $[0,1]$ を n 等分にわけて、総和を求める.
② 台形求積法で求める. ③ シンプソン求積法で求める。

④ $$S=\int_0^1\frac{4\,dx}{1+x^2}=\pi$$ である事を解析的に解く!

$\left(\begin{array}{l}X=\tan\theta \text{ と置く.}\\ 0\leqq X\leqq 1 \text{ で } 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4} \text{ に対応する.}\end{array}\right)$

$$S=\int_0^1\frac{4\,dx}{1+x^2}=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\frac{4\left(\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta}{1+\tan^2\theta}=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}(4)\,d\theta=\pi.$$ である!

〈$\tan\frac{\pi}{4}=\tan 45^\circ=1.$〉

$$\left(1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left(\frac{dX}{d\theta}=\frac{d(\tan\theta)}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left(\frac{\frac{dx}{d\theta}}{1+\tan^2\theta}=\frac{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)}=1\right)$$

〈三角関数の微分を理解する必要がある〜〉

```
/*********************************************************************
     このProgram は  区間[a.b]で定義された関数 y=f(x) に対して、
              (1)区分求積法での定積分  S1[N]
              (2)台形求積法での定積分. S2[N]
              (3)Sympson求積法での定積分  S3[N]  の値をを求めます。
*********************************************************************/
#include <stdio.h>
FILE *fpB; char *BBB="B.txt";
/*** y=f(x)を定義しています***/  double f( double x ) { return  4/(1+x*x) ; }

void  main(void) {  char c; int K,N,M,i; double A,B,a=0,b=1,  S1,S2,S3,x,dx;
                    fpB=fopen(BBB,"w");printf("¥n¥n"); fprintf(fpB,"¥n¥n");
for (M=1;M<8;++M) { N=2*M;  dx=(b-a)/N;
       S1=0;   for (i=1;i<=N;i++)  { x=a+dx*i;  S1=S1+f(x); } ; S1=S1*dx ;
       S2=S1+(f(a)-f(b))*dx/2;
            A=0; for (i=1;i<=M;i++) { x= a+(2*i-1)*dx; A=A+f(x);}
            B=0; for (i=1;i<M;i++)  { x= a+ 2*i*dx   ; B=B+f(x);}
      S3=(f(a)+f(b)+4*A+2*B)*dx/3;
   printf(      "¥n  S1(%d)=%f  S2(%d)=%f  S3(%d)=%f ",N,S1,N,S2,N,S3);
  fprintf(fpB,  "¥n  S1(%d)=%f  S2(%d)=%f  S3(%d)=%f ",N,S1,N,S2,N,S3); }
for (K=2;K<11;++K) { M=K*K*K; N=2*M;  dx=(b-a)/N;
       S1=0;   for (i=1;i<=N;i++)  { x=a+dx*i;  S1=S1+f(x); } ; S1=S1*dx ;
       S2=S1+(f(a)-f(b))*dx/2;
            A=0; for (i=1;i<=M;i++) { x= a+(2*i-1)*dx; A=A+f(x);}
            B=0; for (i=1;i<M;i++)  { x= a+ 2*i*dx   ; B=B+f(x);}
      S3=(f(a)+f(b)+4*A+2*B)*dx/3;
   printf(      "¥n  S1(%d)=%f  S2(%d)=%f  S3(%d)=%f ",N,S1,N,S2,N,S3);
  fprintf(fpB,  "¥n  S1(%d)=%f  S2(%d)=%f  S3(%d)=%f ",N,S1,N,S2,N,S3); }

printf("¥n¥n"); fprintf(fpB,"¥n¥n");
c=getchar( ); if(c=='!') return;fclose(fpB);return; }
/*****************  End of Program ************************************
```

$S = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2} = \int_0^1 f(x)dx$

$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ を定義している

同じProgram ただし、
M=1から7迄で、
(N=2Mは N=2から14迄)
としている。

同じProgram ただし、
K=2から10迄
$M=K^3$は M=8から1000迄
$N=2K^3$は N=16から2000迄
としている。

計算結果 (see B.txt)

```
*****************************************************************
 (1)区分求積法    (2)台形求積法    (3)Sympson求積法
 N=2000 でもダメ。。N=1458でやっと。。N=8 ですでに。。。
*****************************************************************
 S1(2)=2.600000  S2(2)=3.100000  S3(2)=3.133333
 S1(4)=2.881176  S2(4)=3.131176  S3(4)=3.141569
 S1(6)=2.970296  S2(6)=3.136963  S3(6)=3.141592
 S1(8)=3.013988  S2(8)=3.138988  S3(8)=3.141593
 S1(10)=3.039926  S2(10)=3.139926  S3(10)=3.141593
 S1(12)=3.057102  S2(12)=3.140435  S3(12)=3.141593
 S1(14)=3.069314  S2(14)=3.140742  S3(14)=3.141593
 S1(16)=3.078442  S2(16)=3.140942  S3(16)=3.141593
 S1(54)=3.123017  S2(54)=3.141535  S3(54)=3.141593
 S1(128)=3.133770  S2(128)=3.141582  S3(128)=3.141593
 S1(250)=3.137590  S2(250)=3.141590  S3(250)=3.141593
 S1(432)=3.139277  S2(432)=3.141592  S3(432)=3.141593
 S1(686)=3.140135  S2(686)=3.141592  S3(686)=3.141593
 S1(1024)=3.140616  S2(1024)=3.141592  S3(1024)=3.141593
 S1(1458)=3.140907  S2(1458)=3.141593  S3(1458)=3.141593
 S1(2000)=3.141093  S2(2000)=3.141593  S3(2000)=3.141593
*****************************************************************/
```

(N=8ですでに収束)

(N=2000でもまだダメ)

(N=1458でやっと収束)