****

数値計算法　　演習問題　06

****

6.01　LU分解の計算Algorithmを説明せよ。

6.02　LU分解を使って　A[ ][ ]X[ ]=L[ ]U[ ]X[ ]=B[ ]を
　計算するAlgorithmを説明せよ。

$A[\,][\,] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{bmatrix}$

6.03 水源のダムの放流問題について説明せよ。

6.04 金属の中の電子の物理モデルについて説明せよ。

Step ①

$A[\,][\,] = M[\,][\,]A[\,][\,]$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{bmatrix}$

6.05 Jacob法とは？

6.06 ガウス・ザイデル法とは？

6.07 SOR法とは？

6.08 対角優位行列とは？

Step ② $k=1$

6.09 行列式の固有値とは？

Step ③

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{bmatrix} \leftarrow$ [illegible]$=k=1$

Step ④

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{bmatrix}$

6.10 次の連立方程式を掃き出し法で解け。

3x−3z=6;4x+y=4;−x+y+2z=−3;

6.11 次の連立方程式をガウス消去法で解け。

−2x+2y=0;3x−3y+z=1;2x+y+6z=9;

6.12 次の行列式A[ ][ ]をLU分解し det(A)を求めよ。

A[1][ ] = (1 0 1) ; A[2][ ] = (2 1 1); A[3][ ] = (3 4 1);

6.13 次の連立方程式を　Jacob法で反復計算する方法を説明せよ。

3x−z=3 ; x+2y=0 ; x−y+3z=1 ;

6.14　次の連立方程式を　ガウス・ザイデル法で反復計算する方法を説明せよ

3x−z=3 ; x+2y=0 ; x−y+3z=1 ;

6.15　2x2 の行列式の値とその逆行列式を求める方法を説明せよ。

3x3 の行列式の値を求める方法を説明せよ。

****

① $k=1$ から $(n-1)$ ② $i=k$ から n ③ $j=k$ から n

6.01 LU分解の計算Algorithm

〔教科書 pp.83−84 参照〕

$I = I[\,][\,] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ (単位行列の定義) のことである!

Input n, A[ ][ ];

Output L[ ][ ], U[ ][ ];

Step ① M[ ][ ] = I とする。 (M[i][j] = 1 if $i=j$; = 0 if $i \neq j$)

A[ ][ ] = M[ ][ ] A[ ][ ] である。

Step ② $k=1$ とまず置く。(第1列目に注目する。)

Step ③ A[ ][ ] 行列の $i=k$ 行目に注目する。(i=k から n 迄で) (~~[illegible]~~)

Step ④ M[i][k] = A[i][k] / A[k][k] とする。 (A[k][k] ≠ 0)

A[i][k] = 0 と置く。

Step ⑤ $j=(k+1)$ から n に於いて。

A[i][j] = A[i][j] − A[k][j] × M[i][k] とする。

Step ⑥ $k=k+1$ とする。 $k \leq n$ なら step③ に戻る。

Step ⑦ L[ ][ ] = M[ ][ ]; U[ ][ ] = A[ ][ ] となっている!!

(実際にこのAlgorithmでC−言語のProgramを作成して実行すると、L[ ][ ], U[ ][ ] が求まる!)

6.02 LU分解による一次連立方程式の解法

A[ ][ ] X[ ] = B[ ] を解く。

ⓐ A[ ][ ] = L[ ][ ] U[ ][ ] とする L[ ][ ] と U[ ][ ] をまず求める。

ⓑ L[ ][ ] Y[ ] = B[ ] を解く、そして、ⓒ U[ ][ ] X[ ] = Y[ ] を解く。

Step ⓑ の操作　for k=1 から n { まず、Y[k] = B[k] とおく;

for j=1 から (k−1) { Y[k] = Y[k] − L[k][j] Y[j]; }}

Step ⓒ の操作　for k=n から 1 { まず、X[k] = Y[k] とおく;

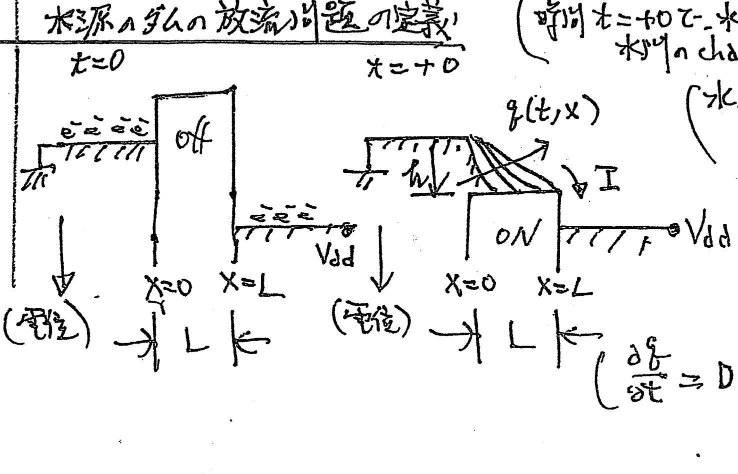
for j=(k+1) から n { X[k] = X[k] − U[k][j] X[j]; }}

(実際にこのalgorithmでC−言語でProgramして実行すると X[ ] が求まる!!)

6.03 水源のダムの放流問題の定義

(時間 $t=+0$ で水門をあけて、水門のchannel水位を h とする)

$t=0$　　$t=+0$



(水門を瞬間に開いても、水はゆっくり流れる!! 水門の長さLが長いと、時間がかかる!)

$\begin{bmatrix} \text{at } x=0 & \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \text{at } x=L & q(t,L)=0 \end{bmatrix}$ 境界条件。

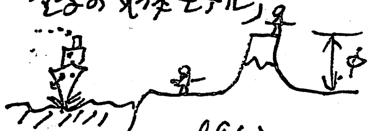
$J = -D\dfrac{\partial q}{\partial x} + \mu E q$; $\dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial J}{\partial x} = 0$;

$\left(\dfrac{\partial q}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \mu E \dfrac{\partial q}{\partial x} \right)$ となる!!

6.04 金属の中の電子の物理モデル（トランジスターの中を電子がどう流れるかを見る!!）

電子は粒子で、「気体」にも「液体」にも「固体」にもなりえる!!

電子の「気体モデル」



富士山の頂上では空気はうすい!!　(空気の密度) $= \rho_0 \cdot \exp\left[-\frac{e\phi}{kT}\right] = \rho(x)$

ϕ =(富士山の高さ)=(電位差)

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = -\left(\frac{e}{kT}\right)\frac{d\phi}{dx}\rho(x) \qquad -\frac{d\phi}{dx} = E(x)$$ ←(山のけわしさ)(坂道の坂の傾き)

(電流の流れ) $= J = -D\frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu E \rho(x)$　(石ころは $E(x)$ の大きさに従いころげ落ちる)

(安定状態では、$J=0$) $\longrightarrow (-D)\left[-\left(\frac{e}{kT}\right)(-E(x))\rho(x)\right] + \mu E(x)\rho(x) = 0$

$$\boxed{\frac{e}{kT} = \frac{\mu}{D}}$$ とする!!　$-(D)\left(\frac{e}{kT}\right) + \mu = 0$

(μ = 電子の移動度　e = 電子の電荷
D = 電子の拡散係数　$kT/e = 24\,\mathrm{mV}$ (室温で))

一般に、

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + D\frac{\partial J}{\partial x} = 0\ ;\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \mu E\frac{\partial \rho}{\partial x}}$$

これを数値計算法で解く!
この方程式を差分方程式として行列式で解く!

6.05 Jacob法とは?

$\begin{pmatrix} 2x-y=1 \\ -x+2y=1 \end{pmatrix}$ の場合、$x=\frac{y+1}{2}$ と置き、$y=\frac{x+1}{2}$ を計算する。　(p.91参照)

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ として、$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　$k=1,2,3,\cdots$ を計算する

6.06 ガウス・ザイデル法とは?

(yが更新されるtimingがJacob法より早い。)　(p.93参照)

$\begin{pmatrix} 2x-y=1 \\ -x+2y=1 \end{pmatrix}$ の場合　$\begin{pmatrix} x_k = \frac{y_{k-1}+1}{2} \\ y_k = \frac{x_k+1}{2} \end{pmatrix}$ とする。　$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ となる。

6.07 SOR法とは?

(SOR = Successive Over-Relaxation)

$\begin{pmatrix} 2x-y=1 \\ -x+2y=1 \end{pmatrix}$ の場合、$\begin{pmatrix} u_k = \frac{y_{k-1}+1}{2}\ ;\ x_k = x_{k-1} + (\omega)(u_k - x_{k-1}) \\ v_k = \frac{x_k+1}{2}\ ;\ y_k = y_{k-1} + (\omega)(v_k - y_{k-1}) \end{pmatrix}$ とする。

($1 < \omega < 2$ とする)

6.08 対角優位行列とは?

(対角優位行列では、どの行においても、
対角成分の絶対値はそれ以外の成分の絶対値の総和よりも大きい。)

A[][]x[]=B[] の連立一次方程式において、

[A[][]が対角優位行列ならば、Jacob法とガウス・ザイデル法は任意の初期値に対して、唯一の真の解に収束する!]

p.97参照

6.09 行列式の固有値とは?

A[][]x[]=(λ)x[] を満たすスカラー値λを固有値、x[]を固有ベクトルという。$n \times n$ 行列式に対して、n次方程式を解く必要がある。その時、固有値は($\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$)の$n$個求まる; $|\lambda_k| < 1$ の時、すべてのkで、真の解に収束する!!　れあ、難しい...(証明は難しい!)

6.10 掃き出し法で解く. pp.97 演習問題[1]

$$\begin{pmatrix} 3x \quad -3z=6 \\ 4x+y \quad =4 \\ -x+y+2z=-3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(第1行を3でわる)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(第1行を4倍して第2行をひく
第1行を−1倍して第3行をひく)

(第2行で第3行をひく) (第3行を−3でわる) (第3行で第1行をたす、第3行4倍して、第2行をひく)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{pmatrix}$$ となる、

6.11 ガウス消去法で解く pp.99 演習問題[2]

(1行目に $3/(-2)$ をかけて2行目から引く)

$$\begin{pmatrix} -2x+2y \quad =0 \\ 3x-3y+z=1 \\ 2x+y+6z=9 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1行目に (-1) をかけて 3行目から引く)

$z=1/1=1$; $y=(9-6z)/3=1$; $x=y=1$;

6.12 LU分解する. pp.99 演習問題[3]

$$\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&1\\2&1&1\\3&4&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\2&1&0\\3&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&1\\0&1&-1\\0&4&-2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0\\2&1&0\\3&4&1 \end{pmatrix}}_{L[\,][\,]}\underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2 \end{pmatrix}}_{U[\,][\,]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1&0&1\\2&1&1\\3&4&1 \end{bmatrix}}_{A[\,][\,]}$$

(1行目を2倍して 2行目からひく
1行目を3倍して 3行目からひく.) (2行目を4倍して、3行目をひく)

$\det A = (\det L)(\det U) = (1)(2) = 2$

6.13 Jacobi法で解く. pp.99 演習問題[4]の1

実際 $(\det A) = (1)(1-4)+(1)(8-3) = -3+5 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3x \quad -z=3 \\ x+2y \quad =0 \\ x-y+3z=1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x=\frac{z+3}{3} \\ y=-\frac{x}{2} \\ z=\frac{-x+y+1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

6.14 ガウス・ザイデル法で解く. pp.99 演習問題[4]の2.

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{aligned} x_k &= \frac{z_{k-1}+3}{3}; \\ y_k &= -\frac{x_k}{2} = -\frac{z_{k-1}+3}{6}; \\ z_k &= \frac{-x_k+y_k+1}{3} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{z_{k-1}+3}{3} + \left(\frac{z_{k-1}+3}{6}\right) - 1\right) = -\left(\frac{z_{k-1}+1}{6}\right) \end{aligned} \right.$$ となる.

6.15 3×3 の行列式の値を求める

$\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ と定義する.

$\begin{pmatrix} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{pmatrix}$ は $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ と書く.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ となる.!!

$\mathrm{inv}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ でもある.!!

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = (a_1)\det\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (b_1)\det\begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} + (c_1)\det\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$= (a_1)(b_2c_3 - c_2b_3) - (b_1)(a_2c_3 - c_2a_3) + (c_1)(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1a_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2$$ となる.

(教科書 p.88 参照)