数値計算法ノート⑤

****

数値計算法　　演習問題 05

****

5.01　連立方程式 A[ ][ ]X[ ]=B[ ] を掃き出し法で解く方法を説明せよ。

具体的な (x,y,z) を未知数とした連立方程式を例に説明せよ。

2x+2y+6z=24; 3x+5y+13z=52;5x+8x+24z=93;

5.02　連立方程式 A[ ][ ]X[ ]=B[ ] をガウス(Gauss)消去法で解く方法を説明せよ。

具体的な (x,y,z) を未知数とした連立方程式を例に説明せよ。

2x+2y+6z=24; 3x+5y+13z=52;5x+8x+24z=93;

5.03　連立方程式 A[ ][ ]X[ ]=B[ ] を LU 分解法 で解く方法を説明せよ。

5.04　行列式 A[ ][ ]を A[ ][ ]=L[ ][ ]U[ ][ ] に分解する手順(algorithm)を

具体的な (x,y,z) を未知数とした連立方程式を例に説明せよ。

2x+2y+6z=24; 3x+5y+13z=52;5x+8x+24z=93;

5.05　連立方程式 A[ ][ ]X[ ]=B[ ] を掃き出し法で解く方法を説明せよ。

具体的な (x,y,z) を未知数とした連立方程式を例に説明せよ。

3x-3z=6;4x+y=4;-x+y+2z=0;

5.06　連立方程式 A[ ][ ]X[ ]=B[ ] をガウス(Gauss)消去法で解く方法を説明せよ。

具体的な (x,y,z) を未知数とした連立方程式を例に説明せよ。

-2x+2y=0;3x-3y+z=1;2x+y+6z=9;

5.07　行列式 A[ ][ ]を A[ ][ ]=L[ ][ ]U[ ][ ] に分解する手順(algorithm)を

具体的な (x,y,z) を未知数とした連立方程式を例に説明せよ。

x+z=b1;2x+y+z=b2;3x+4y+z=b3;

5.08　行列式 A[ ][ ] の余因数行列 Y(k,i)[ ][ ]を定義せよ。

３次元空間ベクトル A[ ]とB[ ]の外積との関係を説明せよ。

5.09　行列式 A[ ][ ]の逆行列式 invA[ ][ ]を求めよ。

****

行列式の計算.

5.01 掃き出し法とは？

$A[\,][\,]x[\,]=B[\,]$ から $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x[\,]=C[\,]$ の形にする.

Step①
$$\begin{pmatrix}2x+2y+6z=24\\3x+5y+13z=52\\5x+8y+24z=93\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2&2&6&24\\3&5&13&52\\5&8&24&93\end{array}\right)$$
を解く！ と書く！

Step②
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\3x+5y+13z=52\\5x+8y+24z=93\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&12\\3&5&13&52\\5&8&24&93\end{array}\right)$$
$-(3\ 3\ 9\ |\ 36)=(3)\times(1\ 1\ 3\ |\ 12)$
$-(5\ 5\ 15\ |\ 60)=(5)\times(1\ 1\ 3\ |\ 12)$

Step③
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\2y+4z=16\\3y+9z=33\end{pmatrix} \longleftarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&12\\0&2&4&16\\0&3&9&33\end{array}\right)$$

Step④
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\y+2z=8\\3y+9z=33\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&12\\0&1&2&8\\0&3&9&33\end{array}\right)$$
$-(0\ 1\ 2\ |\ 8)=(1)\times(0\ 1\ 2\ |\ 8)$
$-(0\ 3\ 6\ |\ 24)=(3)\times(0\ 1\ 2\ |\ 8)$

Step⑤
$$\begin{pmatrix}x+z=4\\y+2z=8\\3z=9\end{pmatrix} \longleftarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&4\\0&1&2&8\\0&0&3&9\end{array}\right)$$

Step⑥
$$\begin{pmatrix}x+z=4\\y+2z=8\\z=3\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&4\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{array}\right)$$
$-(0\ 0\ 1\ |\ 3)=(1)\times(0\ 0\ 1\ |\ 3)$
$-(0\ 0\ 2\ |\ 6)=(2)\times(0\ 0\ 1\ |\ 3)$

Step⑦
$$\begin{pmatrix}x=\\y=2\\z=3\end{pmatrix} \longleftarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}x=1\\y=2\\z=3\end{pmatrix}$$ とする.

この掃き出し法の計算手順(Algorithm)をflow chartに描き、C-programにcodingして、任意のN×Nの行列式を数値計算する!!

5.02 ガウス(Gauss)消去法とは？

$A[\,][\,]x[\,]=B[\,]$ から $\begin{bmatrix}1&u_1&u_2\\0&1&u_3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$ の形にする.

Step①
$$\begin{pmatrix}2x+2y+6z=24\\3x+5y+13z=52\\5x+8y+24z=93\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2&2&6&24\\3&5&13&52\\5&8&24&93\end{array}\right)$$ と書く.

Step②
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\3x+5y+13z=52\\5x+8y+24z=93\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&12\\3&5&13&52\\5&8&24&93\end{array}\right)$$
$-(3\ 3\ 9\ |\ 36)$
$-(5\ 5\ 15\ |\ 60)$

Step③
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\2y+4z=16\\3y+9z=33\end{pmatrix} \longleftarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&12\\0&2&4&16\\0&3&9&33\end{array}\right)$$

Step④
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\y+2z=8\\3y+9z=33\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&12\\0&1&2&8\\0&3&9&33\end{array}\right)$$
$-(3\ 6\ |\ 24)$

Step⑤
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\y+2z=8\\3z=9\end{pmatrix} \longleftarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&12\\0&1&2&8\\0&0&3&9\end{array}\right)$$

Step⑥
$$\begin{pmatrix}x+y+3z=12\\y+2z=8\\z=3\end{pmatrix}$$

Step⑦ $z=3$; $y=8-2z=2$; $x=12-y-3z=12-2-9=1$ と求める!!

5.03 LU分解法とは？

行列式 A[][] = L[][]U[][] と 2つの行列式 L[][] と U[][] に分解する

$A[][]=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$ の時は、 $L[][]=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$ $U[][]=\begin{bmatrix}2&2&6\\0&2&4\\0&0&3\end{bmatrix}$ となる!!

もし、 A[][]X[] = L[][]U[][]X[] = B[] だとすると、

step① L[][]y[] = B[] をまず解いて、y[] を求める。

step② 次に、 U[][]X[] = y[] を解く!

5.04 行列式 A[][] を LU分解する。 $A[][]=\begin{pmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{pmatrix}$ を例とする。

stepの まず $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ と書く。

step②
$\begin{bmatrix}1&0&0\\L_1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&6\\0&a_1&a_2\\5&8&24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$ としたい!!

$\begin{pmatrix}2L1=3\\2L1+a_1=5\\6L1+a_2=13\end{pmatrix}$ であれば良い!! $\begin{pmatrix}L1=\frac{3}{2}\\a_1=2,\ a_2=4\end{pmatrix}$ となる

$\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&6\\0&2&4\\5&8&24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$ となっている。

step③
$\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\L2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&6\\0&2&4\\0&a_3&a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$ としたい!!

$\begin{pmatrix}2L2=5\rightarrow L2=\frac{5}{2}\\2L2+a_3=8\rightarrow a_3=3\\6L2+a_4=24\rightarrow a_4=9\end{pmatrix}$ となる。

$\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&6\\0&2&4\\0&3&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$ となっている。

step④
$\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&L3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&6\\0&2&4\\0&0&a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$ としたい

$\begin{pmatrix}(\frac{5}{2})(2)+(2)(L3)=8\rightarrow L3=\frac{3}{2}\\(\frac{5}{2})(6)+(4)(L3)+a_5=24\\a_5=24-15-6=3\end{pmatrix}$ となる。

$\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&6\\0&2&4\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$ となる!!

すなわち、 L[][]U[][] = A[][] に分解できた!!

$L[][]=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$ $U[][]=\begin{bmatrix}2&2&6\\0&2&4\\0&0&3\end{bmatrix}$ $A[][]=\begin{bmatrix}2&2&6\\3&5&13\\5&8&24\end{bmatrix}$

5.05 はき出し法で解く

$\begin{pmatrix}3x\quad-3z=6\\4x+y\quad=4\\-x+y+2z=-3\end{pmatrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&-3&6\\4&1&0&4\\-1&1&2&-3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\4&1&0&4\\-1&1&2&-3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&4&-4\\0&1&1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&4&-4\\0&0&-3&3\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&4&-4\\0&0&1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\end{array}\right)$ $\{x=1;y=0;z=-1;\}$ となる!!

5.06 ガウス消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} -2x+2y \quad\quad = 0 \\ 3x-3y+z=1 \\ 2x+y+6z=9 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$z=1$; $y=3-2z=1$;
$x=y=1$; $(x=1; y=1; z=1)$ ←

5.07 LU分解して行列式 A[][] の値を求める.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} (\text{第2行}) - (\text{第1行}) \times 2 \to (\text{第2行}) \\ (\text{第3行}) - (\text{第1行}) \times 3 \to (\text{第3行}) \end{bmatrix}$ となる!!

$(L1)(1)=(2) \to L1=2$
$(1)(a_1)=1 \to a_1=1$
$(1)(L1)+(1)(a_2)=1 \to a_2=-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ L2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$(1)(L2)=3 \to L2=3$
$(1)(a_3)=4 \to a_3=4$
$(1)(L2)+(1)(a_4)=1 \to a_4=-2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & L3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} L3=4 \\ 3-L3+a_5=1 \quad a_5=2 \end{pmatrix}$$

$(\det A) = (\det LU) = (\det L)(\det U) = (1)(1)(1)(1)(1)(2) = 2$ ←

5.08 行列式 A[][] とその余因数行列 Y_{ki}[][] の定義

$$A[\,][\,] = \begin{bmatrix} A[1][1] & A[1][2] & A[1][3] \\ A[2][1] & A[2][2] & A[2][3] \\ A[3][1] & A[3][2] & A[3][3] \end{bmatrix}$$ の時.

$$\det A[\,][\,] = \sum_{i=1}^{N} A[k][i]\, Y_{ki}[\,][\,]\, (-1)^{k+i} \quad (k=1,2,\cdots,N)$$ とする.

たとえば $N=3$, $k=1$ の時.

$$\det A[\,][\,] = A[1][1]\,Y_{11}[\,][\,] - A[1][2]\,Y_{12}[\,][\,] + A[1][3]\,Y_{13}[\,][\,]$$

ここで,

$$Y_{11}[\,][\,] = \begin{bmatrix} A[2][2] & A[2][3] \\ A[3][2] & A[3,3] \end{bmatrix}$$

$$Y_{12}[\,][\,] = \begin{bmatrix} A[2][1] & A[2][3] \\ A[3][1] & A[3][3] \end{bmatrix}$$

$$Y_{13}[\,][\,] = \begin{bmatrix} A[2][1] & A[2][2] \\ A[3][1] & A[3][3] \end{bmatrix}$$

ベクトルの外積と同じ

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{e}_x - (A_xA_z - A_zB_y)\vec{e}_y + (A_xB_y - A_zB_x)\vec{e}_z$$

5.09 行列式 A[][] の逆行列式 inv A[][]

$$\text{inv}\, A[i][j] = (-1)^{i+j} \left[\frac{\det Y_{ij}[\,][\,]}{\det A[\,][\,]}\right]$$ となる!!

(A[][] inv A[][] = {inv A[][]} A[][] = 1[][])