① 2×2 行列式
② 複素数
③ フーリエ級数、微分・積分。

****

数値計算法　　演習問題　04

****

4.01　複素数が　2 x 2 の行列式と　1対1対応することを使って、
　　　複素数のたし算とかけ算について説明せよ。

4.02　２点　P(a,b) と Q(c,d) を通る直線の方程式について説明せよ。

4.03　微分の定義を説明せよ。

4.04　Taylor 級数について説明せよ。

4.05　積分の定義を説明せよ。

4.06　以下の　DCDL code で　定義される　RLCのnetwork 回路図　RLCNET( )　を描け。

```
define RLCNET( ) { v=1;
        input  V(t) = v exp(jwt), GND;
        output  V1(t)～V5(t) , IR1(t)～IR5(t),
                IC1(t)～IC4(t), IL1(t)～IL2(t);
        R1(V,V1)=1;R2(V,V2)=2;R3(V3,GND)=3;
         R4(V3,V4)=4;R5(V5,GND)=5;
        wC1(V2,V3)=1; wC2(V2,GND)=2; wC3(V1,V4)=3;wC4(V4,GND)=4;
        wL1(V1,V3)=1;wL2(V4,V5)=1; }
```

●V1～V5,IR1～IR5,IC1～IC4,IL1～IL2 の値（複素数）を求めよ。
　たとえば、　V1(t)= V1 exp(jwt) , IC1(t)=C1 exp(jwt) 等　となる。

****

4.01 複素数のかけ算とたし算 (よく使うのでメモをしておく!)

$$(a+jb)(c+jd) = (ac-bd)+(ad+bc)j$$

$$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)j}{(c^2+d^2)}$$

行列式の値にも対応する. $\left(a+bj=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\ ;\ c+dj=\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\ ;\right)$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ac-bd) & -(ad+bc) \\ (ad+bc) & (ac-bd) \end{bmatrix} = (ac-bd)+(ad+bc)j$$

$$\det\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$\det\begin{bmatrix} (ac-bd) & -(ad+bc) \\ (ad+bc) & (ac-bd) \end{bmatrix} = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$ だから.

$\boxed{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)}$ となる!!

$$\mathrm{inv}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}}{(c^2+d^2)} = \frac{c-dj}{(c^2+d^2)} = \frac{1}{c+dj}$$ に対応する.

$$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mathrm{inv}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}}{(c^2+d^2)} = \frac{\begin{bmatrix} (ac+bd) & -(bc-ad) \\ (bc-ad) & (ac+bd) \end{bmatrix}}{(c^2+d^2)}$$ となっている.

$$\det\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$\det\begin{bmatrix} (ac+bd) & -(bc-ad) \\ (bc-ad) & (ac+bd) \end{bmatrix} = (ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

従って. $\boxed{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)}$ でもある!

4.02 2点 $P(a,b)$ と $Q(c,d)$ を通る直線の式

$y=Ax+B$ とすると. $b=Aa+B$ $\longrightarrow$ $b = Aa+B = \dfrac{(b-d)a}{(a-c)}+B$

$\to d = Ac+B$

$(b-d)=(A)(a-c)$ より $A = \dfrac{(b-d)}{(a-c)}$

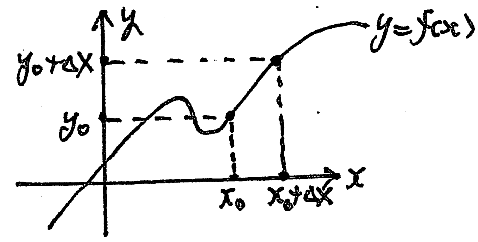
$$\boxed{A=\frac{(b-d)}{(a-c)} \quad B = \frac{(ad-bc)}{(a-c)} = \frac{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}{(a-c)}} \quad B = \frac{b(a-c)-(b-d)a}{(a-c)}$$

(別解) 点 $P(a,b)$ を通るので $y=(A)(x-a)+b$ のはず

$Q(c,d)$ を通るので、$d=(A)(c-a)+b$ のはず.

すなわち. $A = \dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{b-d}{a-c}$ になる!!

4.03 微分の定義



点P$(x_0, f(x_0))$と点Q$(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$を通る直線の方程式は まず点Pを通ることから、

$$y - f(x_0) = (A)(x - x_0)$$ と書ける。

さらに、点Qを通ることから、

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (A)\left[(x_0+\Delta x) - x_0\right]$$

すなわち、$A = \left[\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0}\right]$ とする。

ここで $\Delta x \to 0$ とすると接線となる!

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

のことを、$x=x_0$での $y=f(x)$ の微分係数という。

色々な関数の微分係数.

$f(x)$	x^n	$\cos x$	$\sin x$	e^x	$f(g(x))$	$\ln(x)$
$\dfrac{df}{dx}$	nx^{n-1}	$-\sin x$	$\cos x$	e^x	$\left(\dfrac{df}{dg}\right)\left(\dfrac{dg}{dx}\right)$	$\dfrac{1}{x}$

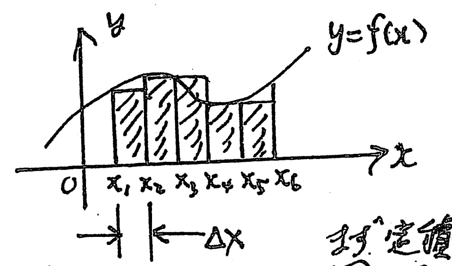
4.04 Taylor 級数

任意の関数は x^n の多項式で近似できる。それを Taylor 級数という!

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=x_0} + \frac{1}{3!}(x-x_0)^3\left(\frac{d^3f(x_0)}{dx^3}\right)_{x=x_0} + \cdots$$

$f(x)$	$\dfrac{df(x)}{dx}$	Taylor 級数
e^x	e^x	$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x^2 < \infty)$
$\log_e(1+x)$	$\dfrac{1}{1+x}$	$\log_e(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (x^2 < 1)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \cdots \quad (x^2 < \infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \cdots \quad (x^2 < \infty)$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + \dfrac{62}{2835}x^9 + \cdots \quad \left(x^2 < \dfrac{\pi^2}{4}\right)$

4.05 積分の定義



$$(\text{実力}) = \int_0^t (\text{努力})\,dt = \sum_{n=0}^{N} \left[\text{努力}(t_n)\right]\Delta t$$

$(t_n = (n)\Delta t)$ のこと!

ちりもつもれば山となる!

毎日、毎日、こつこつと(Δt)時間勉強すると...

(今日は $n=0$; 明日は $n=1$; 次の日は $n=2$; ... N日勉強すれば、$\sum_{n=0}^{N}$ で総和となる...)

まず定積分を定義する。

定積分とは...

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{b-a}{N}\right) f(x_k)$$

のことを、$x=a$ から $x=b$ の $f(x)$ がかこむ面積のこと!!

$$\left(\begin{array}{l} x_k = a + \left(\dfrac{b-a}{N}\right)(k) \\ \Delta x = \left(\dfrac{b-a}{N}\right) \text{のこと.} \end{array}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N)$$

$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ とすると、

$\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ となる!!

(積分は微分の反対だ!)

4.06 RLC( )回路の解析

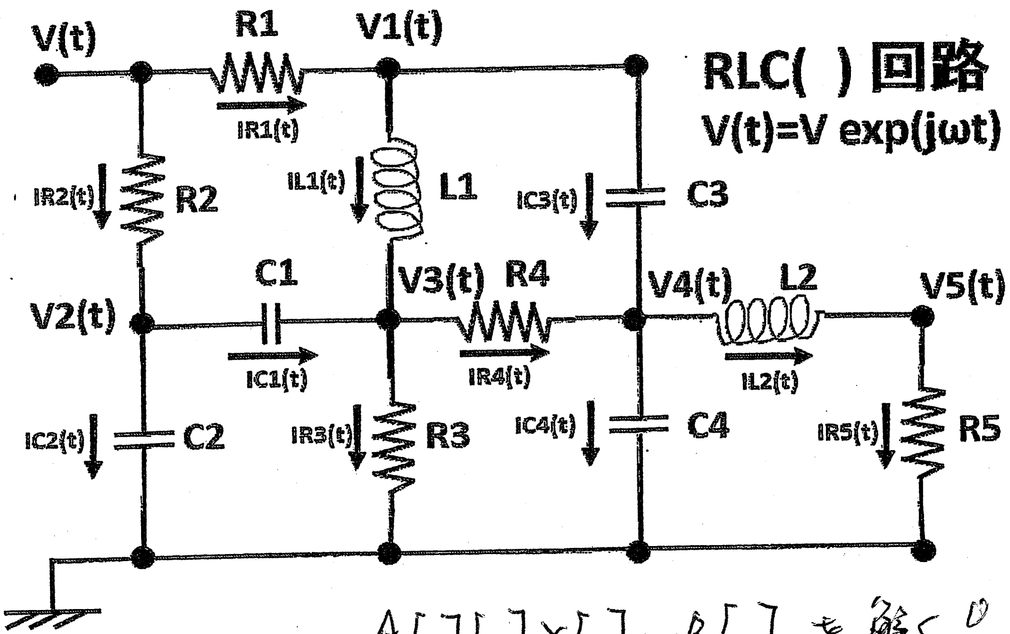
Step① まず右のDCDL Codeから RLC( )回路の配線図を描く。

Step② 各端子間の電流電圧関係式を導く。全部で16個もある!

Step③ 未知数16個の行列式を作成する.

Step④ この16個の未知数の連立方程式を解く!

```
define RLCNET( ) { v=1;
input  V(t) = v exp(jwt), GND;
output  V1(t)~V5(t) ,  IR1(t)~IR5(t),
        IC1(t)~IC4(t),  IL1(t)~IL2(t);
R1(V,V1)=1;R2(V,V2)=2;R3(V3,GND)=3;
R4(V3,V4)=4;R5(V5,GND)=5;
wC1(V2,V3)=1; wC2(V2,GND)=2; wC3(V1,V4)=3;wC4(V4,GND)=4;
wL1(V1,V3)=1;wL2(V4,V5)=1; }
```



A[][]×[]=B[] を解く!

(各端子間の電流電圧関係式)

V1	V2	V3	V4	V5	IR1	IR2	IR3	IR4	IR5	IC1	IC2	IC3	IC4	IL1	IL2					
1	0	0	0	0	R1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	V1	=	V	R1(V,V1)=1 ;	V1+(R1)(IR1)=V ;
0	1	0	0	0	0	R2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	V2	=	V	R2(V,V2)=2 ;	V2+(R2)(IR2)=V ;
0	0	-1	0	0	0	0	R3	0	0	0	0	0	0	0	0	V3	=	V	R3(V3,GND)=3 ;	-V3+(R3)(IR3)=-GND ;
0	0	-1	1	0	0	0	0	R4	0	0	0	0	0	0	0	V4	=	0	R4(V3,V4)=4 ;	-V3+V4+(R4)(IR4)=0 ;
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	R5	0	0	0	0	0	0	V5	=	-GND	R5(V5,GND)=5 ;	-V5+(R5)(IR5)=-GND ;
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	C1	0	0	0	0	0	IR1	=	0	wC1(V2,V3)=1 ;	-V2+V3+(C1)(IC1)=0 ;
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C2	0	0	0	0	IR2	=	-GND	wC2(V2,GND)=2;	-V2+(C2)(IC2)=-GND ;
-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	C3	0	0	0	IR3	=	0	wC3(V1,V4)=3 ;	-V1+V4+(C3)(IC3)=0 ;
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C4	0	0	IR4	=	-GND	wC4(V4,GND)=4;	-V4+(C4)(IC4)=-GND ;
-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L1	0	IR5	=	0	wL1(V1,V3)=1 ;	-V1+V3+(L1)(IL1)=0 ;
0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L2	IC1	=	0	wL2(V4,V5)=1 ;	-V4+V5+(L2)(IL2)=0 ;
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	IC2	=	0	NODE V1 :	IR1-IC3-IL1=0 ;
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	IC3	=	0	NODE V2 :	IR2-IC1-IC2=0 ;
0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	1	0	IC4	=	0	NODE V3 :	IC1+IL1-IR3-IR4=0 ;
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	-1	IL1	=	0	NODE V4 :	IR4+IC3-IC4-IL2=0 ;
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	IL2	=	0	NODE V5 :	IL2-IR5=0 ;

この16×16の行列式を解く!