$y = f(x) = 0$ を解く

非線形方程式



***************************************************************************

数値計算法　　　演習問題　03

***************************************************************************

3.01　それぞれ、(1)反復法(2)Newton法(3)割線法(4)はさみ法で
n次方程式を解く手順を説明しなさい。

3.02　具体的に、　n=2, a[2]=1, a[1]=0, a[0]=p　とする時、
Newton 法での計算方法を説明しなさい。

3.03　面積がPの正方形の１辺の長さを求めたい。
実効的にNewton法で求める手順を説明しなさい。

3.04　体積がPの正立方体の１辺の長さを求めたい。
実効的にNewton法で求める手順を説明しなさい。

3.05　f(x)は２つの根　x=1　と　x=3　を持つ関数とする。
また、x の絶対値が無限大になると f(x)は -0 に近づくとする。
具体的なf(x)を例にして、Newton 法でこの２つの根を求めるとき、
必ずしも近くにある根に収束するとは限らないことを示せ。
また、発散条件なども説明せよ。

3.06　黄金比とは？

3.07　Newton法は複素数領域でも有効であることを、具体的な例で、説明せよ。

3.08　デジタル回路の反転（ CMOS inverter ）回路　inv( )　とは？
反転回路　inv( )の入出力特性を数値計算で求める手順を説明せよ。

***************************************************************************

数値計算法 (B)

n次方程式 $y=f(x)$ を解く

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

反復法では、 $x = g(x) = x - f(x)$ と置く。

$f(x_0) = 0$ なら $x_0 = x_0 - f(x_0)$ となるはず!!

$A < x < B$ の範囲で根があるものとして、適当に $x_1$ を決める。($k=1$)

順次 $x_{k+1} = g(x_k) = x_k - f(x_k)$ を求める。

もし、$|x_{k+1} - x_k| \longrightarrow 0$ となれば、それが $f(x)=0$ の根である。

Newton法では、 (微分の定義) $\dfrac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$ を使う。

$$f(x+h) = f(x) - [(x+h) - x] \frac{df}{dx} = 0$$ として。

$$(x+h) = x - \frac{f(x)}{\left(\frac{df}{dx}\right)}$$ とする。

ここで $x_{k+1} = x + h$ として。 $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_k}}$$ を計算する。

割線法では、

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_{k+1}} = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$ で近似し、

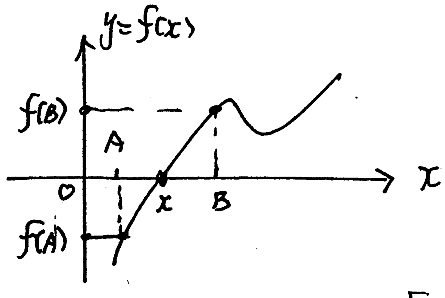
$$x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_{k+1}}}$$ を使う。

すなわち、 $$x_{k+2} = x_{k+1} - \left[\frac{f(x_{k+1})}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}\right](x_{k+1} - x_1)$$ とする。

2分法(はさみ法)では、

$A < x < B$ で根があるとする。 まず $f(A)f(B) < 0$ であるとする。

$$x_{k+1} = \frac{A_k + B_k}{2}$$ とする。 $(A_0 = A,\ B_0 = B)$




$f(A)f(B) < 0$

$f(x_{k+1}) f(A_k) < 0$ なら、

$A_{k+1} = A_k$, $B_{k+1} = x_{k+1}$ とする。

$f(x_{k+1}) f(B_k) < 0$ なら、

$B_{k+1} = B_k$, $A_{k+1} = x_{k+1}$ とする。

$[A_k, B_k]$ の範囲がどんどんせまくなり、

いずれ、$x_k$ は収束する。

当然 $f(x_{k+1}) = 0$ なら $x = x_{k+1}$ が根である。

3.02 $n=2$, $a[2]=1$, $a[1]=0$, $a[0]=p$ の時.

$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^2-p=0$ である. $\frac{df}{dx}=2x$

$$0 \simeq f(x) = x^2-p = f(x_0) + (x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \quad \text{で近似して,}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}} = x_0 - \frac{x_0^2-p}{2x_0} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{p}{2x_0}$$

$x_{k+1} = a x_k + \frac{b}{x_k}$ とすると. $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{p}{2}$ となる ←

3.03 面積が$p$の正方形の一辺の長さ$x$を求めたい.

Step① まず適当に $x_k$ をきめ. $y_k=\frac{p}{x_k}$ を求める.

Step② 次に $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+y_k)=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{p}{x_k}\right)=\frac{1}{2}x_k+\frac{p}{2x_k}$ とする.

$x_{k+1}=a x_k+\frac{b}{x_k}$ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{p}{2}$ となっている!!

これは Newton 法である…いずれ,正方形の一辺に近づく…

3.04 体積が$p$の立方体の一辺の長さ$x$を求める.

Step① まず適当に $x_k$ をきめ. $y_k=x_k$ $z_k=\frac{p}{(x_k)^2}$ とする.

Step② $x_{k+1}=\frac{1}{3}(x_k+y_k+z_k)=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{p}{(x_k)^2}\right)=\frac{2}{3}x_k+\frac{p}{3(x_k)^2}$ とする.

Step③ $f(x)=x^3-p=0$ とすると. $\frac{df}{dx}=3x$

$$0 \approx f(x)=x^3-p=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \quad \text{で近似して.}$$

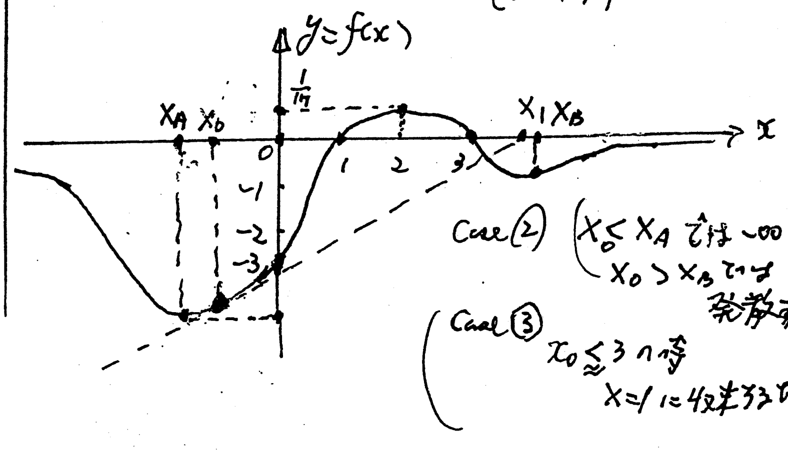
$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}}=x_0-\frac{x_0^3-p}{3x_0^2}=\frac{2}{3}x_0+\frac{p}{3x_0^2}$$

$x_{k+1}=a x_k+\frac{b}{x_k}$ として. $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{p}{3}$ で. Newton法である.

Step①,② で反復して,一辺の長さが求まる!!

3.05 $y=f(x)$ は $|x|\to\infty$ でゼロになるとする.

たとえば $f(x)=\frac{-(x-1)(x-3)}{(x^4+1)}$ とすると. $\left(\begin{array}{ll} f(0)=-3 & f(1)=0 \\ f(2)=\frac{1}{17} & f(3)=0 \end{array}\right)$




Case① もし $x=x_0<0$ を図のようにとると. $x_1>3$ となり. $x=3$ に収束する場合がある.

Case② $x_0\leq x_A$ では $-\infty$ に $x_0>x_B$ では $+\infty$ に発散する.

Case③ $x_0\lesssim 3$ の時 $x=1$ に収束する場合がある

実際、数値計算で確認できる!!

## 3.06 黄金比とは？

もともと、線分Lの長さを $a$ と $b$ に分割する時、すなわち、$L=a+b$ とする時、$a:b = b:L$ となるように分割した時の比の事を言う。最も美しい比とされる？

すなわち $\left(\frac{a}{b} = \frac{b}{L} = \frac{b}{a+b}\right.$ で $\left.\frac{b}{a} = \frac{a}{b}+1 \text{ となる。}\right)$ $\frac{b}{a} = x$ とすると。

$x = \frac{1}{x}+1$ より $x^2 - x - 1 = 0$ となる。

$f(x) = x^2 - x - 1 = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{2} = 0$ より $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ となる。 $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ となる。

### Newton法で黄金比を求める。

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)_{x=x_k} = x_k - \frac{(x_k^2 - x_k - 1)}{(2x_k - 1)} = \frac{x_k^2 + 1}{(2x_k - 1)}$$

| $k=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k=$ | 3 | 2 | 1.666 | 1.619 | 1.618 |
| $x_{k+1}=$ | 2 | 1.666 | 1.619 | 1.618 | 1.618・・・ |

と成る。

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\cdots$

また、$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0.61803\cdots$ となる。

## 3.07 Newton法は複素数でも有効である

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = 0$ とすると。 $f(x) = (x-1)^2 + 1 = 0$ より $x = 1 \pm j$ となる。

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)_{x_k} = x_k - \frac{x_k^2 - 2x_k + 2}{2x_k - 2}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 - 2}{2(x_k - 1)} \text{ となる。}$$

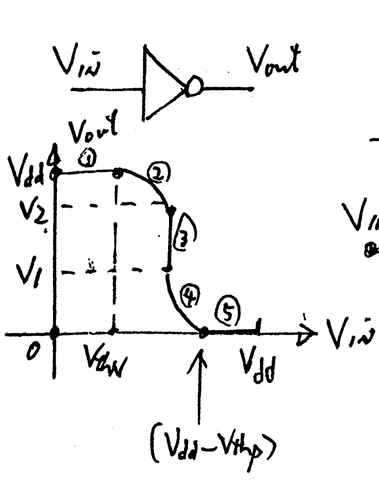
$x_0 = j$ とすると、

$x_1 = \frac{3}{4}(1+j)$

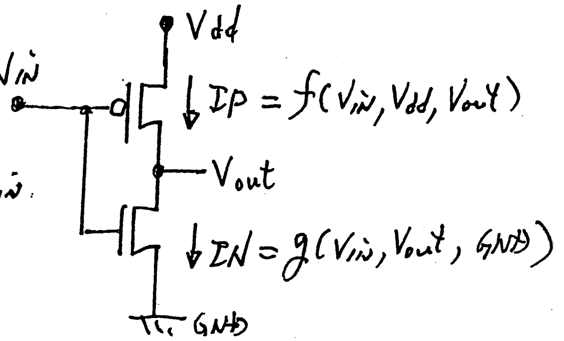
$x_2 = \frac{1}{40}(43+39j)$

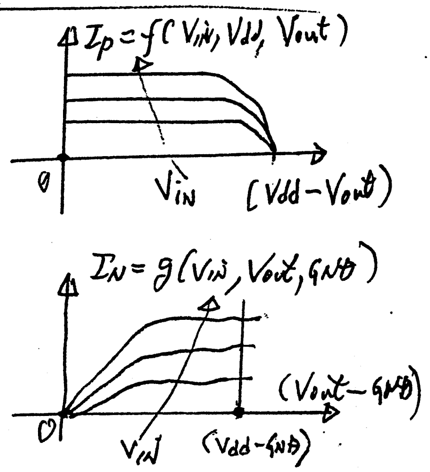
! となり $x = 1+j$ に収束する

## 3.08 Inverter回路 inv() の入出力特性




| $V_{in}$ | $V_{out}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |




この場合、$I_P = I_N$ より、単純に、

$F(V_{out}) = f(V_{in}, V_{dd}, V_{out}) - g(V_{in}, V_{out}, GND) = 0$ をNewton法で解けば良い!!

$(V_{in}, V_{dd}, GND)$ は定数と考える。$V_{out}$ のみが未知数である!