数値計算法 シート ②

・級数の数値計算
・2次〜4次方程式

****

数値計算法　　演習問題 02

****

今週の目標： まず、 教科書 （ pp.17〜32 ） を精読すること。

また同時に、 教科書全体にも目を、何度も通すこと。

****

期待される仕事は、まず 教科書(pp.17〜32) の 16 ページの精読です。

次に、教科書全体の基本にかかわる演習問題02を、基本から理解すること。

理解した内容は必ずメモ書きし、提出シート02 に記載すること。

忘れても、再度読めば理解できるように自分のために記載すること。

暗記力にたよらない作業ですが、しっかり時間をかけて努力してください。

****

2.01 １０進法小数 N32 の 単精度IEEE274形式＝N32[ ]が、

N[32] = (1 0111111111 100 0000000000 0000000000)

の時、１０進法小数 N32を求めよ。

2.02 9 bit (9 けた)の１０進浮動小数点数形式 N9[ ] の

解像度（分解能）について、N9=1 を例に説明せよ。

N9が10のn乗の場合はどうか？

2.03 IEEE574単精度浮動小数点で表記できる最大値は、

何けた未満で、何けた以上か？

2.04 IEEE574単精度浮動小数点形式で表記可能な有効けた数は

10進法表示では何けたになるか？

2.05 IEEE574倍精度浮動小数点で表記できる最大値は、

何けた未満で、何けた以上か？

2.06 IEEE574倍精度浮動小数点形式で表記可能な有効けた数は

10進法表示では何けたになるか？

2.07 真の値 T=3.141592 ; 近似値 A=3.14 ; の時、

絶対誤差 AE , 相対誤差 RE , 精度 P を求めよ。

2.08 プラスの数のみを扱う 10進法数8けた(8 bit)の浮動小数点数形式 N8[ ] での

丸め誤差について説明せよ。10進法数10けた(10 bit)の場合はどうか？

2.09 ２つの近い数 A と B の差を求める時のけた落ちによる相対誤差を説明せよ。

2.10 ２次方程式の公式を導け。けた落ちを回避するにはどうすればよいか？

2.11 等比級数とは？ 基本比 a=1/2 の等比級数はいくらになるか？

2.12 Taylor級数とは？cos(x)とsin(x)のTaylor級数を求めよ。

2.13 πの値を級数で近似せよ。

2.14 三角関数 cos(x) と sin(x)の定積分の性質を説明せよ。

2.15 フーリエ級数とは？ f(x) が step 関数の場合のフーリエ級数を求めよ。

f(π/2)=0 から πの値をフーリエ級数として求めよ。

****

Review $\left(e^{jx} = \cos x + j\sin x \right)$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$
$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$
$$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$
$$\sin(\theta-\phi) = \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi$$
$$\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)\right]$$
$$\sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)\right]$$
$$\sin\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\left[\sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi)\right]$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right)$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)$$

よく使うのでメモ書きして、
いつでも取り出せるようにする！
この授業では暗記する必要はない！

まず、自分のパソコンのコマンド・プロントでC言語のソースプログラム (a.c) を compile して　実行　File (a.exe) を生成する環境を構築してください。

(1) 授業配布のＵＳＢなどから　File (Borland) を　C-Disk にコピーする。
(2) 自分のパソコンの C-Disk の中にある File(User)の中にある File(Owner)に授業配布のＵＳＢなどから c.bat をコピーする。
(3) 自分のパソコンのコマンド・プロントを開いて、仕事場が File(Owner)のなかであること確認する。
(4) c.bat と入力し、仕事場が c:¥borland¥bcc55¥bin になったことを確認する。
(5) 別途用意したソースプログラム (a.c)を仕事場の File (c:¥borland¥bcc55¥bin)の中にコピーする。
(6) 自分のパソコンのコマンド・プロントの中で、bcc32 a.c と入力する。
プログラムの code 記述に error がなければ、実行 File(a.exe)が生成される。
実行 File(a.exe)を自分の好きな data File の中にコピーしてその中で実行する。

(a.bat を borland の file に入れる.)

a.bat = { bcc32 ␣ a.c / a }

$z^2 = (a+bj)$ の根

(Quiz 02)

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{jb}{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}\right]$$

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha+jb}{\sqrt{\alpha}}\right] \quad \alpha = a+\sqrt{a^2+b^2}$$

● 次のN次方程式の解を求めなさい。

● 2次方程式の例：入力 File (A2.txt) 出力 File(B2.txt) で次の２次式を解きます。

$$3x^2 + 78x + 3030 = 0$$

$(x1 = -13 \pm 29)$

● 3次方程式の例：入力 File (A3.txt) 出力 File(B3.txt) で次の３次式を解きます。

$$5x^3 + 215x^2 + 7260x + 85850 = 0$$

● 4次方程式の例：入力 File (A4.txt) 出力 File(B4.txt) で次の４次式を解きます。

$$3x^4 - 24x^3 + 18x^2 - 24x + 315 = 0$$

$3x^2 + 1314x - 122529 = 0 \qquad x = 79, -517$

$7x^3 - 49x^2 + 175x - 273 = 0 \qquad x = 3, 2 \pm 3i$

$5x^4 - 85x^3 + 635x^2 - 2405x + 2870 = 0 \qquad x = 7, 2, 4 \pm 5i$

数値計算法 シート②

2.01 IEEE形式浮動小数実数（1 01111111 100 0000000000 0000000000）の値を求めよ。

p.30 問題[2]の(2)

$N32[\,] = (s, e[\,], m[\,]) = (-1)^s (1.m)_2 \times 2^a \quad (a = e - 127)$

↑1bit ↑8bit ↑23bit

$s = 1;\ e[\,] = (01111111)_2 = (127)_{10}$ $\therefore e = 127$

$a = e - 127 = 0$

$N32 = (-1)^1 (1.1)_2 \times 2^0 = -(1.1)_2 = (-1.5)_{10}$

2.02 96bitの10進浮動小数実数形式の解像度について説明せよ。（教科書 p.11 参照）

p.27の例題(16)

$N9[\,] = \{s, e[\,], m[\,]\} = (-1)^s (0.m) \times 10^a$ （$a = e - 50$）とする。

$N8[\,] = \{e[\,], m[\,]\}$ ↑2bit ↑8bit

↑1bit ↑2bit ↑6bit（6ケタ）

（図 1.9 p.11 を参照）

① $N9 = 1$ の時 $N9 = 1 = (-1)^0 (0.1) \times 10^1$ （$a = 1, s = 0, e = 51$）（$e = a + 50$）

p.30 問題[3]の(1)と(2)

$N9 + \Delta X = (-1)^0 (0.\underbrace{100001}_{(6ケタ)}) \times 10^1$ とするから。

（解像度）$\Delta X = (-1)^0 (0.000001) \times 10^1 = 10^{-5}$ となる。

② $N9 = 10^n$ の時。 $N9 = 10^n = (-1)^0 (0.100000) \times 10^{n+1}$ （$a = n+1, s = 0, e = \cancel{50} 51 + n$）

$N9 = (-1)^s (0.m) \times 10^a$ と対比する。

（解像度）$= \Delta X = (-1)^0 (0.000001) \times 10^{n+1} = 10^{n-5}$ となる!! $e = a + 50 = n + 51$

2.03 IEEE単精度浮動小数点で表現できる最大値は何けた未満何けた以上か？

$N32[\,] = \{s, e[\,], m[\,]\} = (-1)^s \times (1.m)_2 \times 2^a \quad (a = e - 127)$

↑1bit ↑8bit ↑23bit

$e[\,]$ の最大値は $(11111111) = 2^8 - 1 = 255 = e$ $a = 128$

演習問題4の(1)

最大値は（$s = 0;\ e[\,] = (2^8 - 1)_{10} = 255;\ (1.m)_2 \lessapprox (10)_2$）の時である。

（$a = 255 - 127 = 128$；）

すなわち $N32 \lessapprox (-1)^0 (2)_{10} \times 2^{128} = 2^{129} = 10^d$ として。$129 \log_{10} 2 = d$

$\log_{10} 2 = 0.3$ として。$d = (129)(0.3) \approx 38.7$ ←（$10^{38} <$ 最大値 $< 10^{39}$）

最大値は 10^{39} 未満（39ケタ未満）10^{38} 以上（38ケタ以上）となる。

2.04 IEEE単精度浮動小数実形式で表記可能な有効ケタ数は10進法数にしていくらか。

演習問題4の(2)

$N32[\,] = \{s, e[\,], m[\,]\} = (-1)^s \times (1.m)_2 \times 2^a \quad (a = e - 127)$

↑1bit ↑8bit ↑23bit

$m[\,]$ のケタ数は2進法数では、23ケタである。

10進法に直すと。$C = 2^{23} = 10^n$ として。 $n = \log_{10} 2^{23} = 23 \log_{10} 2$

$n = (23)(0.3) = 6.9 \approx 7 = p$ 10進法の有効ケタ数 $p = 7$ となる。

2.05 | IEEE倍精度浮動小数点で表現できる最大値は何けた未満何けた以上か？

演習問題5 p.31の d を求める。

$$N64[\,] = \{s, e[\,], m[\,]\} = (-1)^s \times (1.m)_2 \times 2^a \quad (a = e-1023)$$

s: 1bit, $e[\,]$: 11bit, $m[\,]$: 52bit

最大値は、$s=0$, $e[\,]=(2^{11}-1)_{10}=2047$; $(1.m)_2 \lessapprox (10)_2$ の分となる。

$(a=e-1023=1024) \leftarrow e=2047$

すなわち $N64 \lessapprox (-1)^0 (2)_{10} \times 2^{1024} = 2^{1025} = 10^d$ として。 $(1025)\log_{10} 2 = d$

$d = (1025)(0.3) = 307.5$ 　　308ケタ未満 307ケタ以上。←

$(10^{307} <$ 最大値 $< 10^{308})$

2.06 | IEEE倍精度浮動小数点で表現できる10進法数の有効ケタ数はいくらか？

演習問題5 p.31の p を求める。

$$N64[\,] = \{s, e[\,], m[\,]\} = (-1)^s \times (1.m)_2 \times 2^a \quad (a=e-1023)$$

1bit 11bit 52bit 　$m[\,]$のケタ数は 2進法では 52ケタである。

10進法に直すと、$C=2^{52}=10^n$ として。 $n=\log_{10}2^{52}=(52)\log_{10}2=(52)(0.3)=15.6$

$p=16$ケタ となる ←

2.07 | 真の値 $T=3.141592$; 近似値 $A=3.14$ に対して 絶対誤差AE, 相対誤差RE, 精度pを求めよ。

演習問題6の(1)

$AE=A-T=-0.001592$;

$RE = \frac{AE}{T} = \frac{-0.001592}{3.14159} = -0.000507$; 　$\left(RE = \frac{AE}{T} = \frac{A-T}{T} = \left(\frac{A}{T}\right) - 1.\right)$

(精度 p) = (REの小数部のゼロの数) + 1 = 3 + 1 = 4 ケタ となる。

2.08 | プラスの数のみ扱う 8bit浮動小数点数形式での 丸め誤差について説明せよ (10進法)

問題6の(1) p.31

$$N8[\,] = \{e[\,], m[\,]\} = (1.m)_{10} \times 10^a \quad (a=e-50)$$

2bit 6bit 　$[55\ 123456] = (0.m)\times 10^{e-50}$ ただし!! (p.9の例)

たとえば $A=(1111.0005)_{10} = (1.1110005)_{10} \times 10^3$ $(a=3,\ e=53)$

$B=(1.0001234)_{10} = (1.0001234)_{10} \times 10^0$ $(a=0,\ e=50)$

のたし算の場合、$(1111.0005)_{10} + (1.0001234)_{10} = (1112.0006234)_{10}$

$(A+B=C)$ 　であるべきだが、

けた落ちするので

$(1111.000)_{10} + (1.000123)_{10} = (1112.000123)_{10}$ となり、

問題6の(2)

(さらにケタ落ちして $(1112.00)_{10}$ となる。まるめ誤差が 0.0006234 となる。)

* 10bitの場合

$$N10[\,] = \{e[\,], m[\,]\} = (1.m)_{10} \times 10^a \quad (a=e-50)$$

2bit 8bit 　の場合は、

有効ケタ数は 8ケタ以内なので、AとBをメモリに記憶する時点では、ケタ落ちしない。しかし、$A+B=C$ を計算して、$C=(1112.0006234)_{10}$ となるが、8ケタしか有効にならないので、0.0000234 がまるめ誤差となる。

p.9の例 　$e=55$, $m=23456$

$[55\ 123456] = (0.m)\times 10^{e-50} = (0.123456)\times 10^5 = \ldots$

2.09 2つの近い数 AとBの差を求める時のケタ落ちによる相対誤差を説明せよ.

たとえば $A=1.001192$, $B=1.000981$ とする. 両方とも有効ケタ数は7である.

$A-B=0.000211$ となるが, 有効ケタ数が3ケタに落ちる.

問題6の(3)

実際には, $\begin{pmatrix} 1.0011915 \leq A \leq 1.0011924 \\ 1.0009805 \leq B \leq 1.0009814 \end{pmatrix}$ と考えると.

$(1.0011915-1.000\cancel{9805}^{9814}) \leq (A-B) \leq (1.0011924-1.0009805)$

$\begin{array}{r} 1.0011924 \\ -\,1.0009805 \\ \hline 0.0002119 \end{array}$

$\begin{array}{r} -\,1.0009814 \\ \hline 0.0002101 \end{array}$

$0.002101 \leq (A-B) \leq 0.002119$ とする.

$(A-B)=0.002110\pm 0.000009$ ~~とする.~~

真の値を $T=0.00211$; 近似値 $K=0.002119$ とすると.

$\cancel{K}=0.002115$ なら. $\cancel{\pm}0.2\%$

$AE\ \cancel{AE}=\cancel{A}K-T=\ 0.000009$ =(絶対誤差)

これOK $RE=\dfrac{AE}{T}=\dfrac{0.000009}{0.00211}=\dfrac{9}{2110}=0.0042654\approx 0.4\%$ (相対誤差) となる.

(精度p)=(REの小数部のゼロの数)+1 = 2+1 = 3 ケタとなる.

2.10 2次方程式の一般公式を導け. けた落ちを回避するにはどうすれば良いか?

$ax^2+bx+c=0$ を解く. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0$;

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$; $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)$; $x=-\left(\frac{b}{2a}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)}$

けた落ちが生じる場合(1) $b>0$ の場合. $\left(\frac{b}{2a}\right)\approx\sqrt{\left(\frac{b^2}{2a}\right)-\left(\frac{c}{a}\right)}$; $\left(\frac{b^2}{2a}\right)>>\left(\frac{c}{a}\right)$;

この場合, $x=-\left(\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)}=\dfrac{-\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)}}$ として計算する.

けた落ちが生じる場合(2) $b<0$ の場合.

$-\left(\frac{b}{2a}\right)\approx\sqrt{\left(\frac{b^2}{2a}\right)-\left(\frac{c}{a}\right)}$; $\left(\frac{b^2}{2a}\right)>>\left(\frac{c}{a}\right)$; $x=-\left(\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\left(\frac{b^2}{2a}\right)-\left(\frac{c}{a}\right)}=\dfrac{\left(\frac{c}{a}\right)}{-\left(\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)}}$

として計算する.

2.11 等比級数とは?

$S_n=1+a+a^2+\cdots+a^n$ とする. ($a<1$ の場合. as $n\to\infty$, $a^n\to 0$ となる.

$aS_n=a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}$

$(1-a)S_n=1-a^{n+1}$; $S_n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ となる. $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\dfrac{1}{1-a}}$ となる.

特に $a=\frac{1}{2}$ の場合 $2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$ となる!!

2.12 Taylor 級数とは. $\sin(x)$ と $\cos(x)$ を Taylor 級数で近似せよ.

$f(x)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-a)^n\left[\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$ で近似したものを Taylor 級数という.

$\left(\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x;\ \frac{d}{dx}\sin x=\cos x\ ;\right)$ を使って. $a=0$ の時.

$\begin{pmatrix} \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots \\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots \end{pmatrix}$ となる.

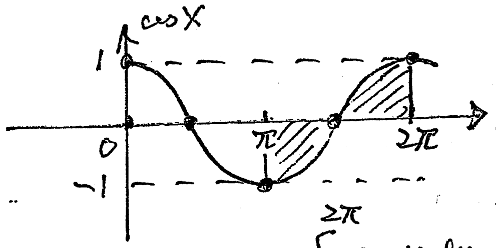
$\left(e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right.$ となる.

2.13 πの値を級数で近似せよ。 (この級数のことをフーリエ級数という!)

$$\pi = 3.14159\cdots = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \cdots$$ と近似できる。

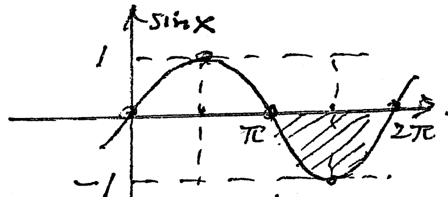
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(4)}{(2k+1)}$$ とすると。 $(\text{Error}) = (\pi - P_n)$ の値を打ち切り誤差という。

2.14 三角関数 $\cos x$ と $\sin x$ の定積分の性質を説明せよ。



$$\int_0^{2\pi} \cos(ax)\,dx = 0$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos x\,dx = 0$$ など...



$$\int_0^{2\pi} \sin(ax)\,dx = 0$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -2$$ など...

2.15 フーリエ(Fourier)級数とは?

任意の関数 $y=f(x)$ を三角関数 $\cos x$ と $\sin x$ の無限級数で近似したものである。

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right] \quad \text{for } 0 \leqq x \leqq T$$

で近似したもの。

ここで、 $$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \ ; \ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx \ ; \ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx \ ;$$ となる。

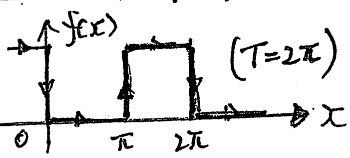
三角関数の定積分の性質を使って上式の関係が導ける!(かなり複雑)

$$\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \underbrace{\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx}_{=\frac{T}{2}} + b_n \underbrace{\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx}_{0}\right\}$$

$$\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \underbrace{\int_0^T \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx}_{0} + b_n \underbrace{\int_0^T \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx}_{=\frac{T}{2}}\right\}$$

$$\left(\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{T}{2} \text{ if } m=n, \ = 0 \text{ if } m \neq n\right) \left(\int_0^T \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{T}{2} \text{ if } m=n, \ = 0 \text{ if } m \neq n\right)$$

$f(x)$ を step 関数として。



$(T=2\pi)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$; となる。

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\left(\frac{2n\pi x}{2\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\Big[\sin(nx)\Big]_{\pi}^{2\pi} = 0$$ となる。

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{2\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\Big[-\cos(nx)\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$\left(b_n = \frac{1}{n\pi}\left[-\cos(2n\pi) + \cos(n\pi)\right] = \frac{1}{n\pi}\left[-1 + (-1)^n\right]\right.$$ となる

$$\left. b_{2k+1} = \frac{-2}{(2k+1)\pi} \ ; \ b_{2k} = 0 \ ; \ \text{for } (k=0,1,2,\cdots)\right)$$ となる。

従って $$f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\sin\left[(2k+1)x\right] = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)\sin\left[(2k+1)x\right]$$ となる。

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots\right]$$ となる!!

特に、 $$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right]$$ となる!! (πが求まる!!)