応用情報数学 シート⑨

****

応用情報数学　演習問題　09　pp. 175～183

****

9.01 時間関数 f(t) の Laplace 変換 F(s)を定義せよ。
微分関数 df(t)/dt のLaplace 変換 が sF(s)となることを導け。
積分関数のLaplace 変換が (1/s) F(s)となることを導け。

9.02 RC( )回路の伝達関数 G(s)を定義せよ。
RC( )回路の周波数伝達関数を定義せよ。 pp. 177–178 参照

9.03 交流電源でのRC( )回路の性質をまとめよ。

9.04 Step Pulse 入力でのRC( )回路の出力応答特性について説明せよ。
積分要素応答とは？一次遅れ要素応答とは？
交流電源の周波数の値に対して、どの様に、
RC( )回路の出力応答波形が変化するかを説明せよ。

9.05 次のDCDL で定義される GGH( )回路の回路図を描き、その伝達関数を求めよ。

```
define GGH( ) { input Vin(t); output Vout(t);
        [Vin,V3]SUB( )->[V1]; [V1]G1( )->[V2];
        [V2]G2( )->[Vout]; [Vout]H( )->[V3]; }
```

p. 180 参照

9.06 次のDCDL で定義される GGG( )回路の回路図を描き、その伝達関数を求めよ。

```
define GGG( ) { input Vin(t); output Vout(t);
        [Vin,V4]SUB(1)->[V1]; [V1]G1( )->[V2];
        [V1]G2( )->[V3]; [V2,V3]SUB(2)->[Vout];
        [Vout]G3( )->[V4]; }
```

p. 181 実戦問題2 参照

9.07 次のDCDL で定義される G( )回路の回路図を描き、その伝達関数を求めよ。

```
define G( ) { input Vin(t); output Vout(t);
        [Vin,Vout]SUB(1)->[V1]; [V1]G( )->[Vout];}
```

p. 181 実戦問題2 参照

9.08 次のDCDL で定義される GGG( )回路の回路図を描き、その出力関数 C(t)を求めよ。

```
define GGG( ) { input R(t),D(t); output C(t);
        [R,C]SUB(1)->[V1]; [V1]G1( )->[V2];
        [V2,D,V4]ADDSUB( )->[V3]; [V3]G( )->[Vout];
        [C]H( )->[V4]; }
```

p. 183 実戦問題3 参照

入力信号 R(t) に対する伝達関数と、入力信号 D(t) に対する伝達関数を求めよ。

****

9.01 Laplace変換とは? その性質は?

時間 $t \geqq 0$ で定義された時間関数 $f(t)$ がある時、 $\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt}$ を Laplace 変換という。

$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ と書く。

微分関数 $\frac{df(t)}{dt}$ の Laplace 変換　　$\frac{d}{dt}\left[f(t)e^{-st}\right] = \frac{df(t)}{dt}e^{-st} - s f(t) e^{-st}$ より、

$\frac{d}{dt}\{A(t)B(t)\} = \frac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\frac{dB(t)}{dt}$ を使う!!

$$\frac{df(t)}{dt}e^{-st} = \frac{d}{dt}\left[f(t)e^{-st}\right] + s f(t) e^{-st}$$ となる。

すなわち、
$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt = \underbrace{\left[f(t)e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty}}_{\to 0 \ (\text{if } f(0)=0 \text{ and } f(\infty)=0)} + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

従って、
$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = s\,\mathcal{L}(f(t))$$

微分の Laplace 変換は s をかけるだけで良い

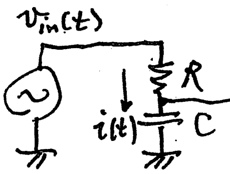
積分の Laplace 変換　　$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)\,dt\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))$ となる...

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\,dt\right] e^{-st}\,dt = \left(\frac{1}{s}\right)\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt - \underbrace{\left[\left(\frac{1}{s}\right)\int_0^t f(t)\,dt\; e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty}}_{\to 0 \text{ となる。}}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]e^{-st} = f(t)e^{-st} - s\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]e^{-st}$$

積分の Laplace 変換は $\left(\frac{1}{s}\right)$ をかけるだけで良い。

9.02 RC( ) 回路の伝達関数とは?



$$\begin{cases} Q(t) = C\, v_{out}(t) \\ \frac{d}{dt}Q(t) = i(t) = C\frac{d}{dt}v_{out}(t) \\ v_{in}(t) - v_{out}(t) = R\, i(t) \end{cases}$$

交流電源の場合

$\left(Z = R + \frac{1}{j\omega C} \text{ より、}\ \vec{V}_{out} = Z\,\vec{i}(t),\ \vec{V}_{out} = \left(\frac{1}{j\omega C}\right)\vec{i}(t) \right)$ だった!!

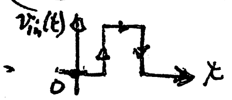
$$v_{in}(t) = (RC)\frac{d}{dt}v_{out}(t) + v_{out}(t)$$

$$\mathcal{L}(v_{in}(t)) = (RC)(s)\,\mathcal{L}(v_{out}(t)) + \mathcal{L}(v_{out}(t))$$

$$\mathcal{L}(v_{in}(t)) = (RCs+1)\,\mathcal{L}(v_{out}(t))$$

$$\mathcal{L}(v_{out}(t)) = \frac{1}{1+RCs}\mathcal{L}(v_{in}(t))$$ となる。

ラプラス変換は
(入力信号から
パルス信号の時、
適用される。)



$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(v_{out}(t))}{\mathcal{L}(v_{in}(t))} = \frac{1}{1+sCR}$$ となる。 $G(s)$ を伝達関数と呼ぶ。

sは何でも良かった... $s = j\omega$ とすると。 $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega CR}$ となる...

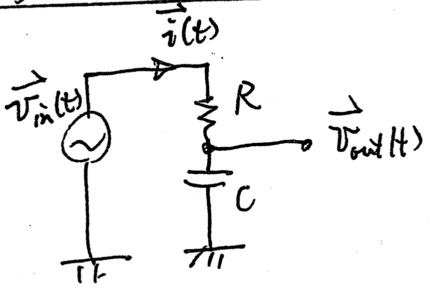
(周波数伝達関数と呼ぶ。)

$Z = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)$ であった!

$\vec{v}_{out} = \dfrac{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{R + \frac{1}{j\omega C}}\vec{v}_{in}$ だったので、 $\dfrac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \dfrac{1}{1+j\omega CR} = G(j\omega)$ となる...

9.03 交流電源でのRC( )回路の性質(復習)

$\vec{i}(t) = i_0 \exp(j(\omega t - \phi))$



$$\begin{pmatrix} \vec{V}_{in}(t) = V_{in}\exp(j\omega t) \\ \vec{V}_{out}(t) = V_{out}\exp(j(\omega t-\theta)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z = R + \frac{1}{j\omega C} \\ |Z| = \sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}} \end{pmatrix}$$

(θは位相遅れ)

$$\begin{pmatrix} \vec{V}_{in}(t) - \vec{V}_{out}(t) = R\,\vec{i}(t) \\ \vec{i}(t) = C\frac{d\vec{V}_{out}(t)}{dt} = j\omega C\,\vec{V}_{out}(t) = i_0\exp(j(\omega t-\phi)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{in}(t) = \vec{V}_{out}(t) + R\,\vec{i}(t) = \vec{V}_{out}(t) + j\omega CR\,\vec{V}_{out}(t) = [1+j\omega CR]\,\vec{V}_{out}(t)$$

$$\frac{\vec{V}_{out}(t)}{\vec{V}_{in}(t)} = \left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right)\exp(-j\theta) = \frac{1}{1+j\omega CR} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} - \frac{j\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right]$$

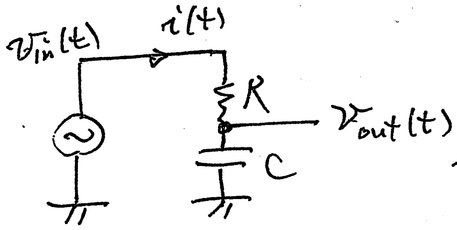
CRの単位は時間(sec)となる

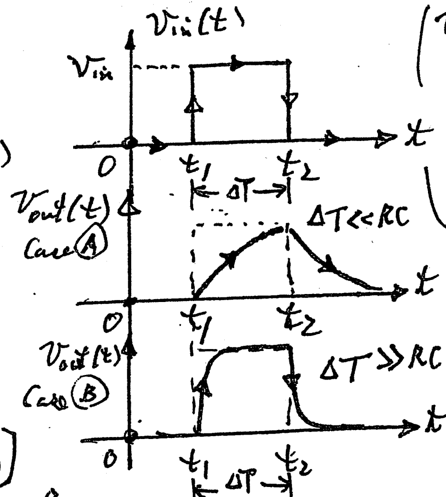
C [farady]
R [Ohm]
CR [sec]

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$$ ←(入力と出力の振幅比) (θは位相遅れ)

$$\left(\cos\theta = \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}};\quad \sin\theta = \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}};\quad \tan\theta = \omega CR; \right)$$

9.04 Step Pulse入力でのRC( )回路の応答





$$\begin{pmatrix} V_{in}(t) - V_{out}(t) = R\,i(t) \\ i(t) = C\frac{dV_{out}(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

$$V_{in}(t) = RC\frac{dV_{out}(t)}{dt} + V_{out}(t)$$

Case A ← $V_{out}(t) \approx \left(\frac{V_{in}}{RC}\right)t$
(ゆっくり立ち上る---)

Case B ← $V_{out}(t) \approx V_{in}$ (一定)
にすぐなる。

$t_2 > t \geq t_1$ では、

$V_{in}(t) = V_{in}$ (一定)

$V_{out}(t) = (V_{in})[1-\exp(-t/RC)]$
となる!

$$\frac{dV_{out}(t)}{dt} = \left(\frac{V_{in}}{RC}\right)\exp(-t/RC)$$

$$RC\frac{dV_{out}(t)}{dt} = V_{in}\exp(-t/RC)$$

$$V_{out}(t) + RC\frac{dV_{out}(t)}{dt} = V_{in}\ (\text{一定})$$ となる!!

Case A　$\Delta T = (t_2 - t_1) << RC$ の時。

〈積分要素〉の応答と言う。　$t/RC << 1$

$\exp(-t/RC) \approx 1 - t/RC$

$V_{out} \approx \left(\frac{V_{in}}{RC}\right)t$ となる。

Case B　$\Delta T = (t_2 - t_1) >> RC$ の時。

$t \approx t_2$ 付近で $t/RC >> 1$ となる。

$\exp(-t/RC) \approx 0$ となるので、

$V_{out}(t) \approx V_{in}$ (一定) となる。

すぐに $V_{out}(t) \approx V_{in}$ (一定) となる...

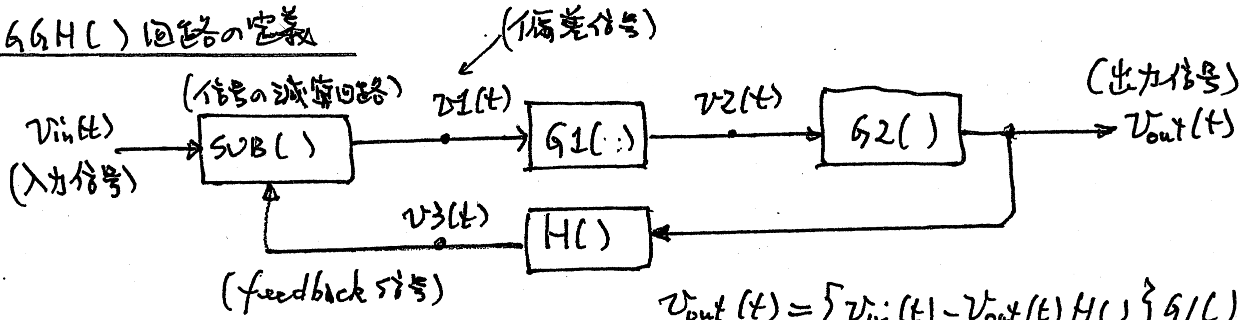
〈一次遅れ要素〉の応答と言う...
(指数関数的に応答が早い)

入力信号がPulse信号でなくても

交流信号であっても、その入力周波数($\omega=2\pi f$)の値によって、$\omega RC << 1$ の時は、抵抗値と容量の値が大きい為に、波形が極端になまる Case A

$\omega RC >> 1$ の時は、忠実に交流信号を通す。抵抗値も容量も比較的小さいからである... Case B

9.05 GGH( )回路の定義

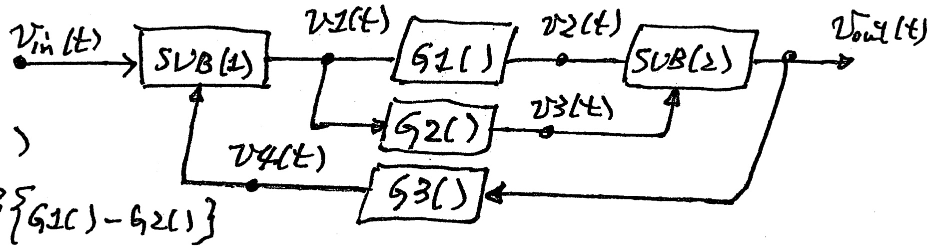


$$v_{out}(t)=\{v_{in}(t)-v_{out}(t)H(\,)\}G1(\,)G2(\,);$$

$$\left(\begin{array}{l} v_1(t)=v_{in}(t)-v_3(t); \\ v_3(t)=v_{out}(t)H(\,); \\ v_{out}(t)=v_2(t)G1(\,)G2(\,); \\ v_1(t)=v_{in}(t)-v_{out}(t)H(\,); \end{array}\right)$$

$$\frac{v_{out}(t)}{v_{in}(t)}=\frac{G1(\,)G2(\,)}{1+H(\,)G1(\,)G2(\,)}$$

9.06 GGG( )回路の定義



$$v_{out}(t)=v_1(t)[G1(\,)-G2(\,)]$$

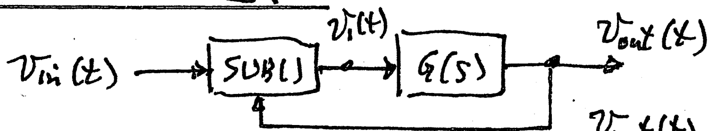
$$v_1(t)=v_{in}(t)-v_{out}(t)G3(\,)$$

$$v_{out}(t)=\{v_{in}(t)-v_{out}(t)G3(\,)\}\{G1(\,)-G2(\,)\}$$

$$\frac{v_{out}(t)}{v_{in}(t)}=\frac{G1(\,)-G2(\,)}{1+G3(\,)\{G1(\,)-G2(\,)\}}$$

(注意) $G3(\,)G1(\,)\neq G1(\,)G3(\,)$

9.07 G( )回路の定義

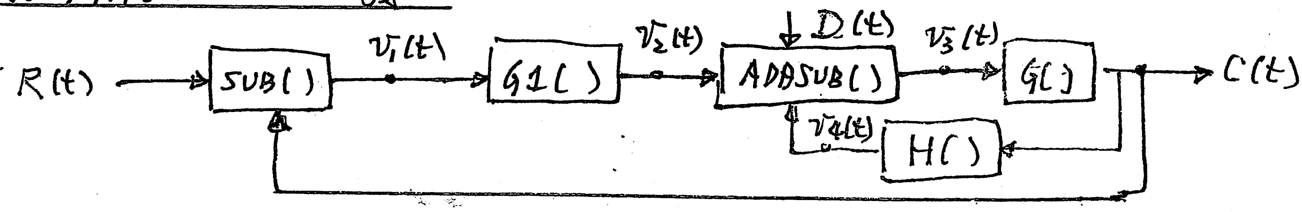


$$v_{out}(t)=[v_{in}(t)-v_{out}(t)]G(s)$$

$G(s)=\dfrac{2}{s(s+2)}$ の場合は...

$$\frac{v_{out}(t)}{v_{in}(t)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{2}{s(s+2)+2}=\frac{2}{s^2+2s+2}$$

9.08 2入力GGH( )回路の定義



$$\left\{\begin{array}{l} v_1(t)=R(t)-C(t) \\ v_2(t)=v_1(t)G1(\,) \\ v_3(t)=v_2(t)+D(t)-v4(t) \\ v_4(t)=C(t)H(\,) \\ C(t)=v3(t)G(\,) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -G1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -H \\ 0 & 0 & -G & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R \\ 0 \\ D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & G1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & G1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -H \\ 0 & 0 & 0 & G & G1G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R \\ RG1 \\ D+RG1 \\ 0 \\ (D+RG1)G \end{bmatrix}$$

(掃き出し法で行列式を変形していく!)

$$C(1+G1G+HG)=(D+RG1)G$$

$$C=\frac{DG+RG1G}{1+(G1+H)G}$$

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{\partial C}{\partial D}=\dfrac{G}{1+(G1+H)G} \\ \dfrac{\partial C}{\partial R}=\dfrac{G1G}{1+(G1+H)G} \end{array}\right)$$