教科書 pp.139–151

****

応用情報数学　演習問題　06

****

6.01　複素数三相交流起電力ベクトルの和はゼロとなることを説明せよ。

6.02　複素数三相交流起電力ベクトルの直交座標表示について説明せよ。

虚数jをかけるといくらベクトルが回転したことになるか？

6.03　実効値 V の対称三相起電力の

①瞬時値

②直座標系表示

③極座標系表示

について説明せよ。

（相電流／線電流
相電圧／線電圧）
を理解する

6.04　独立三相回路とは？

6.05　三相４線式回路とは？

6.06 Y結線回路（星形結線回路）とは？

6.07 線間電圧と相電圧の位相差について説明せよ。

6.08 Y結線回路（星形結線回路）の場合の、

相電流と線電流の関係を説明せよ。

****

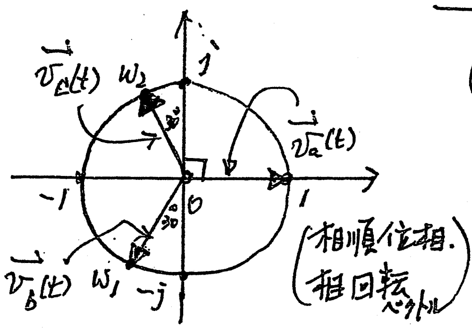
6.01 複素数三相交流起電力（ベクトル）の和はゼロである。 ($v_0=\sqrt{2}V$)

$$\begin{cases}\vec{v_a}(t)=v_0\exp(j\omega t)\\ \vec{v_b}(t)=v_0\exp\left(j\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\\ \vec{v_c}(t)=v_0\exp\left(j\left(\omega t-\frac{4}{3}\pi\right)\right)\end{cases}$$

$$\left(\begin{aligned}w_1&=\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}\\ w_2&=\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}\end{aligned}\right)$$

$$\vec{v_a}(t)+\vec{v_b}(t)+\vec{v_c}(t)$$

$$=v_0\exp(j\omega t)\left[1+\exp\left(-\frac{2}{3}\pi j\right)+\exp\left(-\frac{4}{3}\pi j\right)\right]$$



今、$x^3=1$ の根を $(1, w_1, w_2)$ とすると、

($x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ より、
$x=1$ 以外の根を w とすると、$w^2+w+1=0$)

Eulerの公式より。 $1+w_1+w_2=0$ となる。

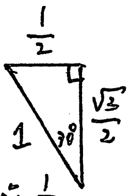
[$w_2=\exp\left(\frac{2\pi}{3}j\right)$ $w_1=\exp\left(\frac{4\pi}{3}j\right)$ となる。
$(w_2)^2=\exp\left(\frac{4\pi}{3}j\right)=w_1$
$(w_1)^2=\exp\left(\frac{8\pi}{3}j\right)=\exp\left(\frac{2\pi}{3}j\right)=w_2$ となる。]

(ここで $w_1=\exp\left(\frac{4\pi}{3}j\right)=\exp\left(-\frac{2\pi}{3}j\right)$ である。
また $w_2=\exp\left(\frac{2\pi}{3}j\right)=\exp\left(-\frac{4\pi}{3}j\right)$ である。)

$1+w_1+w_2=0$ となる。

ゼロ ⇓

$\vec{v_a}(t)+\vec{v_b}(t)+\vec{v_c}(t)=v_0\exp(j\omega t)\,(1+w_1+w_2)$ より。



実際に三角関数の値を求めると、

$\vec{v_a}(t)+\vec{v_b}(t)+\vec{v_c}(t)=0$ となる。

$\left(\begin{aligned}\sin 30^\circ&=\frac{1}{2}\\ \cos 30^\circ&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right)$

$$\left(\begin{aligned}\exp\left(-\frac{2}{3}\pi j\right)&=\cos\frac{2}{3}\pi-j\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\\ \exp\left(-\frac{4}{3}\pi j\right)&=\cos\frac{4}{3}\pi-j\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\end{aligned}\right) \text{となる。}$$

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$ ← $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin$

$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ← $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

6.02 三相起電力の直交座標表示

$\vec{v_a}(t)$ を基準に、$\left(\begin{aligned}\vec{v_b}(t)&=\vec{E_b}\,\vec{v_a}(t)\\ \vec{v_c}(t)&=\vec{E_c}\,\vec{v_a}(t)\end{aligned}\right)$ と書くと、$\left(\begin{aligned}\vec{E_b}&=\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}\\ \vec{E_c}&=\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}\end{aligned}\right)$ となる。

(複素数 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に限って、ベクトルのかけ算がなりたつ。要素数が3つとなると、外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ と内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ にかけ算はわかれる!!)

$\left(\vec{v_a}(t)=\vec{E_a}\,\vec{v_a}(t)\right)\Rightarrow$ (ついでに、$\vec{E_a}=1$ となる。)

複素数 (j) をかける事は、$z=a+bj$ $(z)(j)=-b+aj$ となり
$(z)(j)$ は z を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた事に対応する。

複素数 ($w_2=\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}=\exp\left(-\frac{4\pi}{3}j\right)=\exp\left(\frac{2\pi}{3}j\right)$ をかける場合、
$(z)(w_2)$ は、z のベクトル位相を $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 進める事に対応する。

複素数は、2次元ベクトルの回転 operator (Vector Operator) と呼ぶ。

6.03 実効値 V volt の対称三相起電力の瞬時値(1)、直交座標系表示(2) 極座標系表示(3)

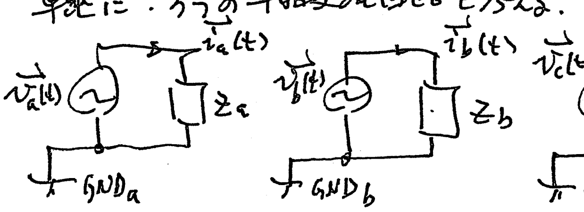
$$\begin{cases}v_a(t)=\sqrt{2}V\sin(\omega t)\\ v_b(t)=\sqrt{2}V\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\\ v_c(t)=\sqrt{2}V\sin\left(\omega t-\frac{4}{3}\pi\right)\end{cases}$$

$\vec{E_a}=V$ (実数)
$\vec{E_b}=\left(\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}\right)V$
$\vec{E_c}=\left(\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}\right)V$

$\vec{E_a}=V$
$\vec{E_b}=V\exp\left(-\frac{2\pi}{3}j\right)=V\exp\left(\frac{4\pi}{3}j\right)$
$\vec{E_c}=V\exp\left(-\frac{4\pi}{3}j\right)=V\exp\left(\frac{2\pi}{3}j\right)$

6.04 独立三相式回路とは？

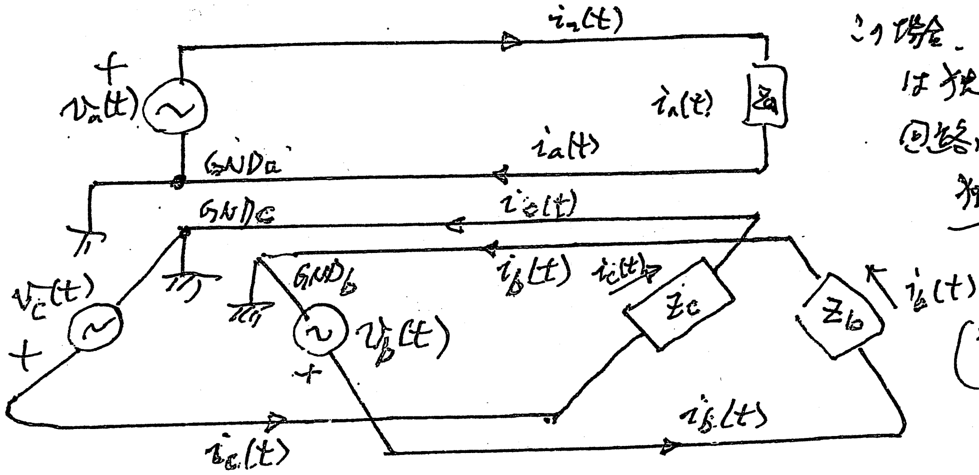
単純に、3つの単相交流回路を考える。



$$\begin{bmatrix} \vec{v}_a(t) = (z_a)\,\vec{i}_a(t) \\ \vec{v}_b(t) = (z_b)\,\vec{i}_b(t) \\ \vec{v}_c(t) = (z_c)\,\vec{i}_c(t) \end{bmatrix}$$

となっている。

この3つの回路は次の様にも描くことができる。



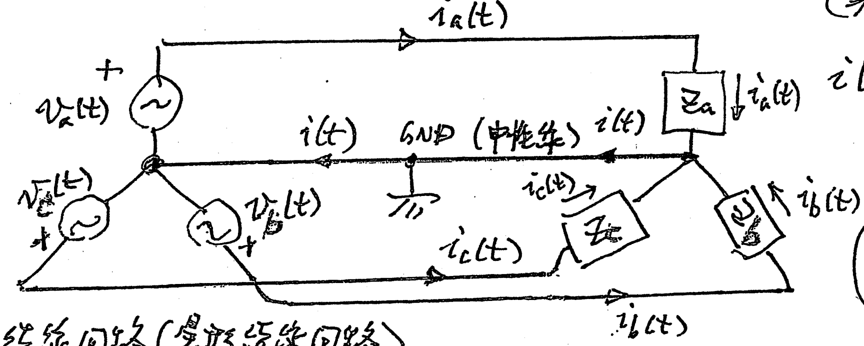
この場合、GND$_a$, GND$_b$, GND$_c$ は独立しており、3つの回路は分離独立している。

独立三相式回路と呼ぶ。

(わざとGND線を平行にしている。)

6.05 三相4線式回路とは？

独立三相式回路で GND = GND$_a$ = GND$_b$ = GND$_c$ とする。
(共通とする！)

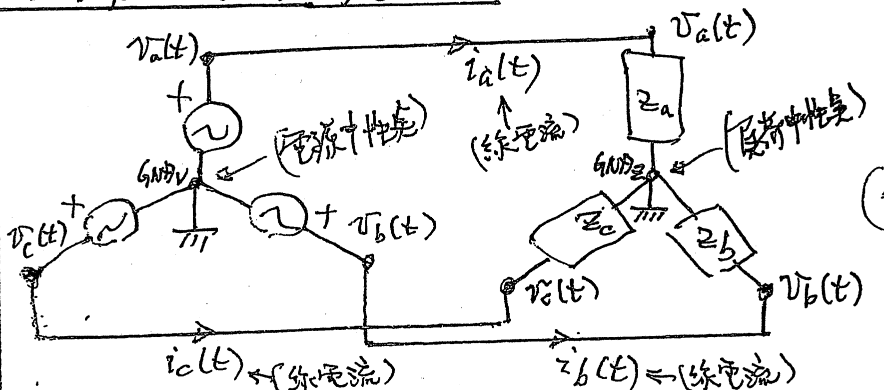


$$i(t) = i_a(t) + i_b(t) + i_c(t)$$

$$\boxed{i(t) = 0}$$

(中性線に流れる電流の合計はゼロである。)

6.06 Y結線回路(星形結線回路)



3本の線で電力を送る方式を三相3線式という。

$(v_a(t), v_b(t), v_c(t))$ = (相電圧)と呼ぶ。

$(i_a(t), i_b(t), i_c(t))$ = (相電流)と呼ぶ。
||
(線電流) = (電源と負荷の間を流れる。)

$(v_a(t)-v_b(t),\ v_b(t)-v_c(t),\ v_c(t)-v_a(t))$ = (線間電圧)と呼ぶ。

(各端子間の電圧差)である!!

$$\left(\begin{array}{l} v_{ab}(t) = v_a(t) - v_b(t),\quad v_{bc}(t) = v_b(t) - v_c(t) \\ v_{ca}(t) = v_c(t) - v_a(t) \quad \text{と書く。} \end{array} \right)$$

$\{i_a(t), i_b(t), i_c(t)\}$ は線電流とも呼ぶ…

6.07 線間電圧と相電圧の位相差

相電圧が対称三相電圧の時は、

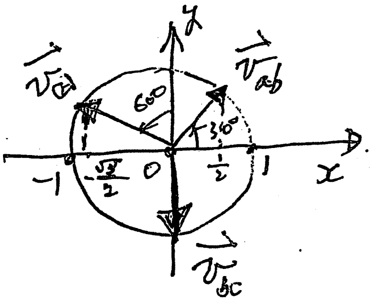
$\boxed{|線間電圧| = \sqrt{3}\,|相電圧|\ となる.}$

$$\begin{cases} \vec{v_a}(t) = \vec{v_a}(t) \\ \vec{v_b}(t) = (w_1)\,\vec{v_a}(t) \\ \vec{v_c}(t) = (w_2)\,\vec{v_a}(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} w_1 &= \frac{-1-\sqrt{3}j}{2} = \exp\left(-\frac{2}{3}\pi j\right) \\ w_2 &= \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} = \exp\left(-\frac{4\pi}{3}j\right) \end{aligned}$$

と書ける.

$$\begin{pmatrix} \vec{v_{ab}} = \vec{v_a} - \vec{v_b} = (1-w_1)\,\vec{v_a} = \left(\frac{3+\sqrt{3}j}{2}\right)\vec{v_a} = \sqrt{3}\exp\left(\frac{\pi}{6}j\right)\vec{v_a} \\ \vec{v_{bc}} = \vec{v_b} - \vec{v_c} = (w_1 - w_2)\,\vec{v_a} = -\sqrt{3}\cdot\vec{v_a} = \sqrt{3}\exp\left(-\frac{\pi}{2}j\right)\vec{v_a} \\ \vec{v_{ca}} = \vec{v_c} - \vec{v_a} = (w_2 - 1)\,\vec{v_a} = \frac{-3+\sqrt{3}j}{2}\vec{v_a} = \sqrt{3}\exp\left(\frac{5}{6}\pi j\right)\vec{v_a} \end{pmatrix}$$

となる.



$$\begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\pi}{6}j\right) = \frac{1+\sqrt{3}j}{2} \\ \exp\left(\frac{5\pi}{6}j\right) = \frac{-\sqrt{3}+1}{2}j \\ \exp\left(-\frac{\pi}{2}j\right) = \exp\left(\frac{3}{2}\pi j\right) = -j \end{pmatrix}$$

であるから...

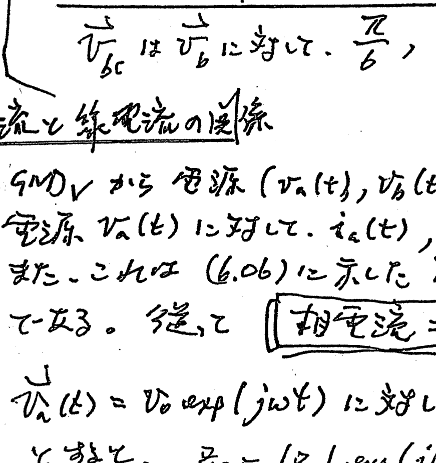
$|線間電圧| = |\vec{v_{ab}}| = \sqrt{3}\,|\vec{v_a}| = (\sqrt{3})\,|相電圧|$ となる!!

$\underline{|\vec{v_{ab}}| = |\vec{v_{bc}}| = |\vec{v_{ca}}| = \sqrt{3}\,|\vec{v_a}|}$ で. 位相は $\vec{v_{ab}}$ は $\vec{v_a}$ に対して $\frac{\pi}{6}$, $\vec{v_{bc}}$ は $\vec{v_b}$ に対して $\frac{\pi}{6}$, $\vec{v_{ca}}$ は $\vec{v_c}$ に対して $\frac{\pi}{6} = 30°$ 進んでいる.

6.08 相電流と線電流の関係

GND$_V$ から電源 ($v_a(t)$, $v_b(t)$, $v_c(t)$) に流れる電流を相電流という.
電源 $v_a(t)$ に対して $i_a(t)$, $v_b(t)$ に対して $i_b(t)$, $v_c(t)$ に対して $i_c(t)$ が相電流である.
また、これは (6.06) に示した Y 結線回路 (星形結線回路) を見れば分かるように 線電流である。従って $\boxed{相電流 = 線電流}$ のことである?

$\vec{v_a}(t) = v_0\exp(j\omega t)$ に対して、$\vec{v_a} = (z_a)\,\vec{i_a}(t)$ で $\vec{i_a}(t) = i_0\exp(j(\omega t - \theta))$ とすると. $z_a = |z_a|\exp(j\theta)$ となっている. $z_a = R + jX$ なら $|z_a| = \sqrt{R^2+X^2}$, $\tan\theta = \frac{X}{R}$;
同様に $\vec{v_b}(t) = v_0\exp\left(j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)\right)$, $\vec{v_c}(t) = v_0\exp\left(j\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)\right)$ なので. $z = z_a = z_b = z_c$ なら
$\vec{i_a}(t) = i_0\exp(j(\omega t - \theta))$ に対して, $\vec{i_b}(t) = i_0\exp\left(j\left(\omega t - \theta - \frac{2}{3}\pi\right)\right)$,
$\vec{i_c}(t) = i_0\exp\left(j\left(\omega t - \theta - \frac{4}{3}\pi\right)\right)$ と書ける. 従って, 相電流 ($\vec{i_a}(t)$, $\vec{i_b}(t)$, $\vec{i_c}(t)$) は、それぞれの相電圧 ($\vec{v_a}(t)$, $\vec{v_b}(t)$, $\vec{v_c}(t)$) より θ だけ遅れて流れている



左図の様に. $\vec{v_a}(t)$ を基準として、
(すなわち $\vec{v_a}(t)$ を x 軸に平行に描くと)

$$\begin{pmatrix} \vec{v_b}(t) は -120° = -\frac{2}{3}\pi 方向に、 \\ \vec{v_c}(t) は -240° = 120° = -\frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi 方向に なる。 \end{pmatrix}$$

$\vec{i_a}(t)$, $\vec{i_b}(t)$, $\vec{i_c}(t)$ は. それぞれ、
$\vec{v_a}(t)$, $\vec{v_b}(t)$, $\vec{v_c}(t)$ に対して θ 遅れている.
(時計方向に $+\theta$ 回転している。)