****

応用情報数学　演習問題　04　　　教科書　pp. 119～127

****

4.01　次の DCDL code で定義された回路 LR( ) を描け。

define LR( ) { input v(t), GND, L, R ; output i(t); IL(v, V1); IR(V1, GND); }

電源とVRの比が与えられた時、R と L の関係を求めよ。

4.02　次の DCDL code で定義された回路 RX( ) を描け。

define RX( ) { input v(t), GND, L, X ; output i(t); IR(v, V1); IX(V1, GND); }

電源 v(t)と電流 i(t) が与えられた時、R と X の値を求めよ。

4.03　R1//R2　および　Z1//Z2 の値を求めよ。

4.04　Admittance を定義せよ。

4.05　C//R( )回路を図示せよ。

v(t)の位相θがπ/4で、V/I=10の時、R と wCR の値を求めよ。

4.06　R//L//C( )回路を描け。

IL=17A, IC=5A, I=13Aの時　IRの値を求めよ。

4.07　π(パイ)抵抗回路　PAIR( ) を図示せよ。

```
define  PAIR( ) {   input Vin, Iout, Ra, Rb, Rc; output Vout, Iin;
                    Ia=IRa(Vin, GND); Ib=IRb(Iout, GND); Ic=IRc(Vin, Vout);
                    Iin=Ia+Ib; Iout=Ic-Ib; }
```

input(Vin, Iout)からoutput(Vout, Iin)を求める変換行列式を求めよ。

4.08　2段はしご回路　Ladder2R( )回路を図示せよ。

入力値(V, I)と出力値(Vout, Iout)の関係を求めよ。

4.09　(R+C//L)回路を図示せよ。

V=100v, I=5A, 1/wC=4Ω, R=12Ωの時　wLの値を求めよ。

4.10　R1//(jwL+R2)回路を図示せよ。

R1=10Ω, R2=16Ω, wL=12Ωの時、R2で消費される電力値を求めよ。

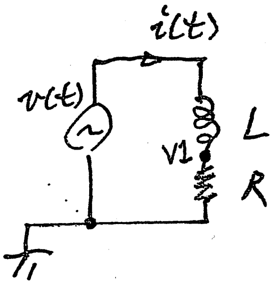
4.11　抵抗体R で消費される電力値を定義せよ。

4.12　電力の複素数表示に関わる以下の物理量を定義せよ。

①皮相電力②力率③無効率④無効電力⑤電力ベクトル

****

4.01 LR( )回路で電源とV_Rの比が与えられている場合. p.119 実戦 (12)



$Z = R + j\omega L$; $\vec{v}(t) = Z\,\vec{i}(t)$;

$$\left(\begin{array}{l} \vec{v}_R(t) = R\,\vec{i}(t) \\ \vec{v}_L(t) = (j\omega L)\,\vec{i}(t) \end{array}\right.$$

$V_R = |\vec{v}_R(t)|$ のこと.

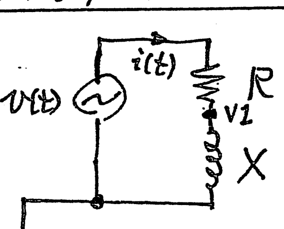
$V = |\vec{v}(t)|$ のこと.

たとえば $V_R = \dfrac{V}{\sqrt{2}}$ とすると、 $\vec{v}_R(t) = R\,\vec{i}(t) = (R)\left(\dfrac{\vec{v}(t)}{Z}\right)$

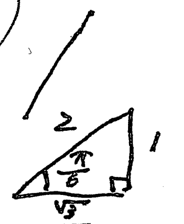
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{V_R}{V} = \left|\frac{\vec{v}_R(t)}{\vec{v}(t)}\right| = \left|\frac{R}{R + j\omega L}\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \;;\quad 2R^2 = R^2 + (\omega L)^2$$

$R^2 = (\omega L)^2 \longrightarrow \boxed{R = \omega L}$ となる!!

4.02 RX( )回路で $i(t)$ と $v(t)$ が与えられている場合.



$Z = R + jX = \dfrac{\vec{v}(t)}{\vec{i}(t)}$ となる! p.120 実戦 (13)



$\frac{\pi}{6} = 30°$

$\vec{v}(t) = 100\sqrt{2}\,\exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

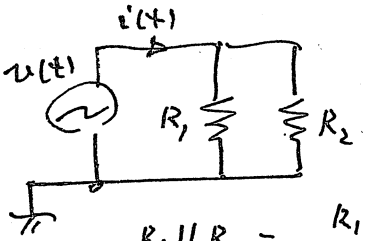
$\vec{i}(t) = 2\sqrt{2}\,\exp[\,j\omega t\,]$ の場合.

$$Z = R + jX = 50\exp\left[j\frac{\pi}{6}\right] = (50)\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \left(\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$Z = (50)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = 25\sqrt{3} + 25j$$

$R = 25\sqrt{3} = 43.3\,\Omega$; $X = 25\,\Omega$ となる!

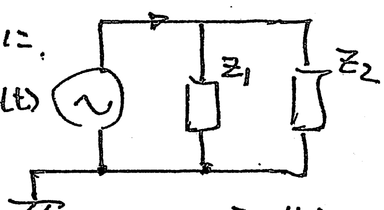
4.03 平行 impedance の総合 impedance



p.120-121

$R_1 \parallel R_2 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ だった.

同様に、



Impedance の場合も.

$Z_1 \parallel Z_2 = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ となる!!

4.04 Admittance の定義 p.121

(Admittance Y) = (Impedance Z) の逆数のこと.

$\left(Y = \dfrac{1}{Z}\right)$ $\quad \vec{v}(t) = (Z)\,\vec{i}(t) \quad \vec{i}(t) = \dfrac{1}{Z}\vec{v}(t) = (Y)\,\vec{v}(t)$

$\vec{i}(t) = (Y)\,\vec{v}(t)$ となる

$Z = R + jX$ とすると.

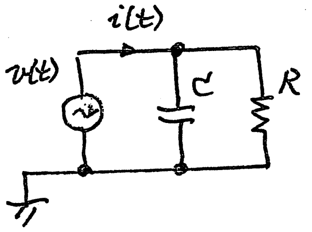
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \text{ となる.}$$

$Y = g - jb$ と書くと、

$g = \dfrac{R}{R^2 + X^2}$ = (conductance) と呼ぶ

$b = \dfrac{X}{R^2 + X^2}$ = (susceptance) と呼ぶ

4.05 C//R(　)回路で $i(t)$ と $v(t)$ が与えられている時.　　p.122 実戦 14



$$Z = R /\!/ C = \frac{(R)\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{R + \left(\frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{\vec{v}(t)}{\vec{i}(t)}$$

$$\begin{cases} \vec{i}(t) = 10\sqrt{2}\exp[j\omega t] \\ \vec{v}(t) = 100\sqrt{2}\exp\left[j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right] \end{cases}$$

$$\frac{R}{1+j\omega CR} = 10\exp\left[-j\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\left(\begin{aligned} \exp\left[-j\frac{\pi}{4}\right] &= \cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j) \end{aligned}\right)$$

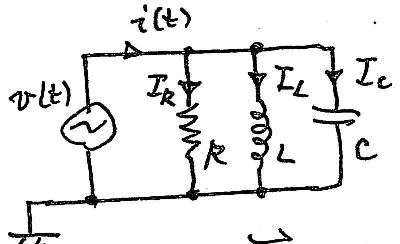
$$R = (1 + j\omega CR)(5\sqrt{2})(1-j)$$

$$R = (5\sqrt{2})\left[1 + \omega CR + j(\omega CR - 1)\right]$$

$$\begin{cases} R = (5\sqrt{2})(1 + \omega CR) = 10\sqrt{2}\ \Omega \longleftarrow \\ \omega CR = 1 \end{cases}$$

$R \simeq 14\,\Omega$ となる

4.06 R//L//C(　)回路で I, I_L, I_C が与えられている時.　　p.123 実戦 15



$$\vec{i}(t) = \vec{i}_R(t) + \vec{i}_L(t) + \vec{i}_C(t)$$

$$\vec{v}(t) = (Z)\,\vec{i}(t) = \left(\frac{1}{Y}\right)\vec{i}(t)$$

$$\left(Z = R/\!/L/\!/C\ ;\quad Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\ ; \right)$$

$$\vec{i}_R(t) = \frac{1}{R}\vec{v}(t)\ ;\quad \vec{i}_L(t) = \frac{1}{j\omega L}\vec{v}(t)\ ;\quad \vec{i}_C(t) = j\omega C\,\vec{v}(t)\ ;$$

$$\vec{i}(t) = \vec{i}_R(t) + \vec{i}_L(t) + \vec{i}_C(t) = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right]\vec{v}(t) = (Y)\,\vec{v}(t)$$

となっている!!

$$\begin{pmatrix} |\vec{i}_L(t)| = I_L = 17A \\ |\vec{i}_C(t)| = I_C = 5A \\ |\vec{i}(t)| = I = 13A \end{pmatrix}$$ とする.

$|\vec{i}_R(t)| = I_R$ を求めたい.

$$|\vec{i}_R(t)| = \frac{1}{R}|\vec{v}(t)| = I_R$$

また、$\vec{i}(t) = \left[1 + \frac{R}{j\omega L} + j\omega CR\right]\vec{i}_R(t)$ である.

また $|\vec{i}_L(t)| = I_L = \left(\frac{1}{\omega L}\right)|\vec{v}(t)| = \left(\frac{R}{\omega L}\right)I_R$; $\frac{R}{\omega L} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{17A}{I_R}$;

$|\vec{i}_C(t)| = I_C = (\omega C)|\vec{v}(t)| = (\omega CR)\,I_R$; $\omega CR = \frac{I_C}{I_R} = \frac{5A}{I_R}$;

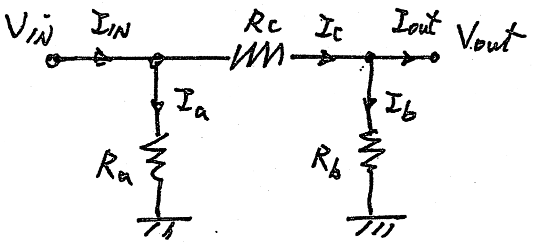
$$\vec{i}(t) = \left[1 + \frac{17A}{jI_R} + j\frac{5A}{I_R}\right]\vec{i}_R(t)$$ となる.

$$\vec{i}(t) = \left[I_R + j(5-17)\right]\left(\frac{\vec{i}_R(t)}{I_R}\right)$$

$$I = |\vec{i}(t)| = |I_R - 12j| = 13 \qquad I_R^2 + 12^2 = 13^2$$

$I_R^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$　　$I_R = 5A$ となる //

4.07 π(パイ)抵抗回路 PAIR( )の性質 p.124 実験(16)



$$\left(\begin{aligned} V_{IN} &= I_a R_a = I_c R_a + I_b R_b \\ I_{out} &= I_c - I_b \\ I_{IN} &= I_a + I_c \\ V_{out} &= I_b R_b \end{aligned}\right)$$

$\left(\begin{aligned} V_{IN} &= I_c R_c + R_b I_b \\ I_{out} &= I_c - I_b \end{aligned}\right)$ に注目する。 $\left(I_a = \frac{1}{R_a} V_{IN}\right)$

$$\begin{aligned} \therefore\quad V_{IN} &= I_c R_c + I_b R_b \\ -)\quad R_c I_{out} &= I_c R_c - I_b R_c \\ \hline V_{IN} - R_c I_{out} &= (R_b + R_c) I_b \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} V_{IN} &= I_c R_c + I_b R_b \\ +)\quad R_b I_{out} &= I_c R_b - I_b R_b \\ \hline V_{IN} + R_b I_{out} &= (R_b + R_c) I_c \end{aligned}$$

$$I_b = \frac{V_{IN} - R_c I_{out}}{(R_b + R_c)} \qquad I_c = \frac{V_{IN} + R_b \cdot i_{out}}{(R_b + R_c)}$$

$$\left(\begin{aligned} V_{out} &= I_b R_b = \left(\frac{R_b}{R_b + R_c}\right)(V_{in} - R_c I_{out}) \\ I_{IN} &= I_a + I_c = \left(\frac{1}{R_a}\right) V_{in} + \frac{V_{in} + R_b \cdot i_{out}}{(R_b + R_c)} \end{aligned}\right)$$

$$\begin{bmatrix} V_{out} \\ I_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_b}{R_b + R_c} & -\frac{R_b R_c}{R_b + R_c} \\ \frac{1}{R_a} + \frac{1}{(R_b + R_c)} & \frac{R_b}{(R_b + R_c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in} \\ I_{out} \end{bmatrix}$$ となる!!

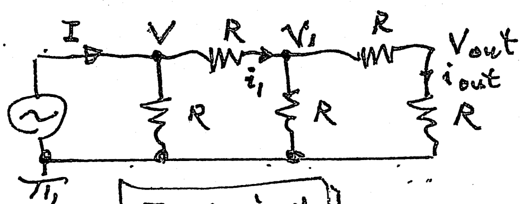
特に、$R_a = R_b = R_c = R$ の時。

$$\begin{pmatrix} V_{out} \\ I_{IN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{R}{2} \\ \frac{3}{2R} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{IN} \\ I_{out} \end{pmatrix}$$ となる。

$I_{out} = 0$ ならば

$$\left(\begin{aligned} V_{out} &= \frac{V_{IN}}{2} \Rightarrow V_{IN} = 2 V_{out} \\ I_{IN} &= \frac{3}{2R} V_{IN} \Rightarrow I_{IN} = \frac{3}{R} V_{out} \end{aligned}\right)$$ となる。

4.08 2段はしご抵抗回路 Ladder 2R( )回路の性質 p.124 実験(16)



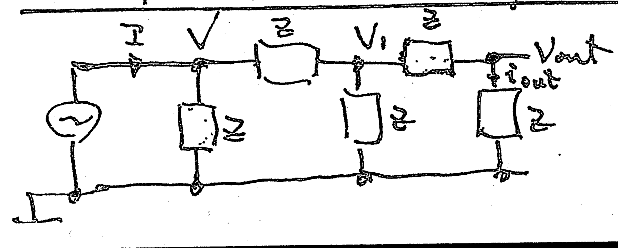
$\boxed{I = 8\, i_{out}}$

$\left(i_{out} = \frac{V_{out}}{R} ;\ V_1 = 2 V_{out} ;\ i_1 = \frac{3}{R} V_{out}\right)$ である。

$$\therefore\quad V = V_1 + R i_1 = 2 V_{out} + 3 V_{out} = 5 V_{out}$$

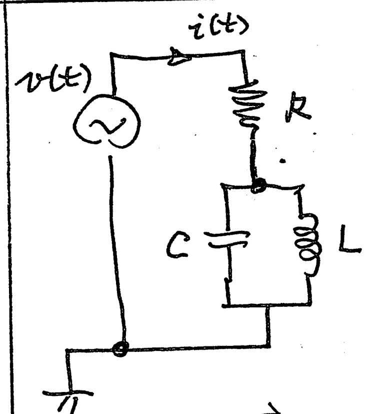
$$I = \frac{V}{R} + i_1 = \frac{5 V_{out}}{R} + \frac{3 V_{out}}{R} = \frac{8 V_{out}}{R} = 8\, i_{out}$$

抵抗体 R だけでなく、任意の impedance $Z = R + jX$ で置き換えても、同じである。



$\boxed{\vec{I} = 8\, \vec{i_{out}}}$ となる。 $\left(\begin{aligned} &\vec{i_{out}} = 1j\ [A] \text{ なら} \\ &\vec{I} = 8j\ [A] \text{ となる!!} \end{aligned}\right)$

4.09 (R + C//L) 回路の性質　　p. 125 実験⑰



$$Z = R + C/\!/L = R + \frac{(j\omega L)\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{(j\omega L) + \left(\frac{1}{j\omega C}\right)} = R + \frac{j\omega L}{(1-\omega^2 LC)}$$

$$\vec{v}(t) = V\exp(j(\omega t - \theta)) = (Z)\, i(t) = (Z) I \exp(j\omega t)$$

$$Z = \frac{V}{I}\exp(-j\theta) \quad ; \quad I = |\vec{i}(t)| = 5A$$

$$\frac{1}{\omega C} = 4\Omega \qquad R = 12\Omega \qquad Z = 12 + \frac{j\omega L}{\left(1 - \frac{\omega L}{4}\right)}$$

$$|\vec{v}(t)| = V = 100\ \text{volt.} = |Z|\, I.$$

$$(100) = (5)\left|12 + \frac{j\omega L}{\left(1 - \frac{\omega L}{4}\right)}\right| \qquad (20)^2 - (12)^2 = (8)(32) = (16)^2$$

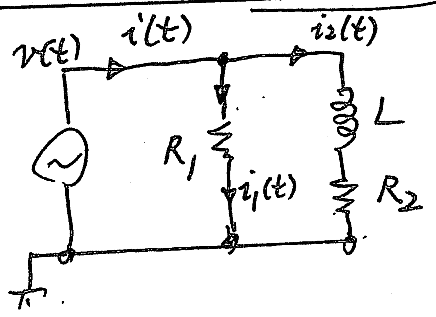
$$(20)^2 = (12)^2 + \frac{(\omega L)^2}{\left(1 - \frac{\omega L}{4}\right)^2} \quad ; \quad \frac{(\omega L)^2}{\left(1 - \frac{\omega L}{4}\right)^2} = (8)(32) = (16)^2$$

① $\dfrac{\omega L}{1 - \frac{\omega L}{4}} = 16$ の時　　$\omega L = 16 - 4\omega L$　　$\omega L = \dfrac{16}{5} = 3.2\,\Omega$ となる！

② $\dfrac{\omega L}{1 - \frac{\omega L}{4}} = -16$ の時　　$\omega L = 4\omega L - 16$　　$\omega L = \dfrac{16}{3} = 5.3\,\Omega$ となる！

p. 126 実験⑱

4.10 $R_1 /\!/ (j\omega L + R_2)$ 回路の性質



$$\left(\begin{array}{l} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 16\Omega \\ \omega L = 12\Omega \end{array}\right) \qquad Z = \frac{(R_1)(R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{(10)(16 + 12j)}{26 + 12j}$$

(抵抗体の場合には、電流と電圧の位相が同じ)

$$\vec{i}(t) = \vec{i}_1(t) + \vec{i}_2(t)$$
$$\vec{v}(t) = R_1\,\vec{i}_1(t)$$
$$\vec{v}(t) = (R_2 + j\omega L)\,\vec{i}_2(t) = R_1\,\vec{i}_1(t)$$

$$(R_2 \text{で消費される電力}) = \left|(\vec{i}_2(t))^2 R_2\right| = (5)^2(16) = 400\ \text{watt}$$

$$\vec{i}_2(t) = \left(\frac{R_1}{R_2 + j\omega L}\right)\vec{i}_1(t) = \left(\frac{10}{16 + 12j}\right)\vec{i}_1(t)$$

$$I_1 = |\vec{i}_1(t)| = 10A$$

$$I_2 = |\vec{i}_2(t)| = \frac{10}{4\sqrt{16+9}}\,|\vec{i}_1(t)| = \left(\frac{1}{2}\right) I_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(10) = 5A$$

(教科書 128–129)

4.11 抵抗体 R が消費する電力 P の定義　　$\left(V = IR \ ;\ I = \frac{V}{R}\right)$ <消費電力は実数>

直流の場合、$P = IV = I^2 R = \dfrac{V^2}{R}$ であるが……　　$\boxed{(\text{有効電力}) = IV\cos\theta}$

交流電流・電圧、$\left[\begin{array}{l} i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t) \\ v(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t - \theta) \end{array}\right]$ の場合は、$P(t) = i(t)\,v(t) = 2IV\sin(\omega t)\sin(\omega t - \theta)$

$(\text{瞬時電力}) = P(t) = (IV)(\cos\theta - \cos(2\omega t - \theta))$　　$(\text{時間平均電力}) = \langle p \rangle = IV\cos\theta$

4.12 電力の複素数表示　教科書 pp. 129-132.

正弦波交流の電圧 $\vec{v}(t)$ と電流 $\vec{i}(t)$ は複素数として、以下の様に表示した。

$\vec{v}(t) = (V)\exp(j\omega t)$　　$\vec{i}(t) = (I)\exp(j(\omega t - \theta))$　とする。

<u>虚数部分が実世界の観察値となる。</u>

複素数 $z = a + bj$ の共役複素数 $\bar{z} = a - bj$ と定義した。

$(z)(\bar{z}) = |z|^2 = a^2 + b^2$ となる。

同様に、電流 $\vec{i}(t)$ の共役電流を $\overline{i(t)}$ と表記する。

$\overline{i(t)} = (I)\exp(-j(\omega t + \theta))$　となる。

① 皮相電力とは？　交流回路では、電圧Vと電流Iの大きさがわかっていても、位相θの値が未知では、それだけでは、(実効電力) = (瞬時平均電力) = (有効電力) = $P = VI\cos\theta$ は決定しない。この場合 $S = VI$ は見かけの値で皮相電力と呼ぶ。

$$\boxed{\begin{array}{l}(\text{有効電力}) = P = VI\cos\theta \\ (\text{皮相電力}) = S = VI\end{array}}$$

Remember?　$Z = R + jX = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

$\tan\theta = \frac{X}{R}$;　$\left(\begin{array}{l} X > 0\ (\text{誘導性}) \\ X < 0\ (\text{容量性}) \end{array}\right)$

② 力率の定義　有効電力(P)と皮相電力(S)の比を力率という、

$$\boxed{(\text{力率}) = \frac{P}{S} = \frac{VI\cos\theta}{VI} = \cos\theta}$$

③ 無効率の定義

また $\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sin\theta$ で示される値を<u>無効率</u>と呼ぶ

④ 無効電力の定義　単位はバール(bar)で呼ぶ！

$Q = (\text{無効電力}) = (\text{皮相電力})(\text{無効率}) = (S)(\sin\theta) = (VI)\sin\theta$

$P = S\cos\theta$;　$Q = S\sin\theta$;　より $\boxed{S^2 = P^2 + Q^2}$ となる。

$(\text{皮相電力})^2 = (\text{有効電力})^2 + (\text{無効電力})^2$ となる。

⑤ 電力ベクトルの定義

2通りある！
$\left(\begin{array}{l} \vec{S_L}(t) = \vec{v}(t)\,\overline{i(t)} = V\exp(j\omega t)\, I\exp(-j(\omega t - \theta)) \\ \vec{S_C}(t) = \overline{v(t)}\,\vec{i}(t) = V\exp(-j\omega t)\, I\exp(j(\omega t - \theta)) \end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{l} \vec{S_L}(t) = VI\exp(j\theta) = VI\cos\theta + jVI\sin\theta = P + jQ \\ \vec{S_C}(t) = VI\exp(-j\theta) = VI\cos\theta - jVI\sin\theta = P - jQ \end{array}\right)$ となる!!