****

応用情報数学　演習問題　01

教科書　pp.87～103

****

1.01　複素数とは？複素数とベクトルとの関係は？　p.88

複素数平面を定義し、平面の点と複素数の関係を説明せよ。

複素数の絶対値とは？複素数の偏角とは？

1.02　オイラー(Euler)の公式とは？

xのn乗が１の時、xの値（n個の根）を求めよ。　p.89

その値を複素数平面上の点として図示せよ。

1.03　Z=a+jb= R exp(jθ) として、a,b,R,θの関係を、　p.90

具体的に数値を入れて説明せよ。

1.04　共役複素数とは？その性質を説明せよ。　p.91

1.05　複素数の加減演算を複素数平面上の点として説明せよ。

具体的に２つの複素数のたし算と引き算を例に　p.92

その計算結果の絶対値と偏角の値を求めよ。

1.06　P=a+jb で　Q=c+jd　とする時、

具体値な数値を入れて、PとQの和と差、

および、その絶対値と相差角の関係を示せ。

1.07　２つの複素数 P[ ]とQ[ ]のわり算と、　(p.93)

複素数平面上の２点 P[ ]とQ[ ]の回転について説明せよ。

1.09　虚数 j のべき乗と、それと対応する複素平面上の点

の回転について説明せよ。　p.94

1.10　正弦波交流の複素数表記について説明せよ。

(1) ２つの電流の実効値と相対位相値が与えられている時　p.98

その合成電流の実行値を求めよ。

(2)電流の瞬時値が与えられている時、その直交座標表示と　p.99 例題⑨⑩

極座標表示を説明せよ。

(3)電流の直交座標表示が与えられている時、その瞬時値を求めよ。

1.11　２つ電流の直交座標表示が与えられている時、その合成電流の

(1)直交座標表示
(2)極座標表示　p.100 実戦問題1
(3)瞬時値表示

を具体的な数値を例にして計算せよ。

1.12 電圧の瞬時値 v(t) を基準として、　p.100～101 実戦問題2

電流の瞬時値　i(t)の相対波形図を、

具体的な数値を例にして描き、相対位相の値との関係を示せ。

1.13 電圧と電流の瞬時値を

$v(t) = V_m \sin(\omega t-\alpha)$,

$i(t) = I_m \cos(\omega t+\beta)$　とする時、　p.102 実戦問題3

その位相差を、具体的な数値を例にして計算せよ。また、

複素数平面上での円周回転ベクトルとの位相関係を図示し説明せよ。

****

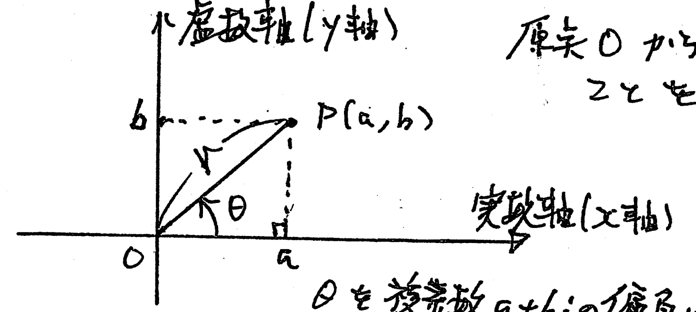
1.01 複素数とは？ p.88−

㊟ $X^2=-1$ の根を $\pm j=\pm\sqrt{-1}$ と表記する。jの事を虚数と呼ぶ。

㊟ 複素数とは、$a+bj$ のことである。ここで a と b は実数である。

㊟ ベクトルを $\vec{z}=\underline{z}=z[\,]$ 等と表記する。 複素数 $z=a+bj$ は、ベクトル $z[\,]=(a,b)$ と1対1で対応する。また2つの実数ペア (a,b) は表面上の点 $P(a,b)$ とも1対1で対応する。すべて同じものと考える。

㊟ 複素数 $z=a+bj$ は、要素数が2のベクトル $z[\,]=\{z[1]=a;\ z[2]=b\}$ でもある。複素数平面を x軸を実数軸、y軸を虚数軸として定義する。



原点Oから点 $P(a,b)$ の距離 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ のことを複素数 $z=a+bj$ の絶対値と呼ぶ。

$$\left(\begin{array}{l} a=r\cos\theta \\ b=r\sin\theta \end{array}\quad \tan\theta=\frac{b}{a}\right)$$

$r^2=a^2+b^2$ となっています。

θを複素数 $a+bj$ の偏角という。

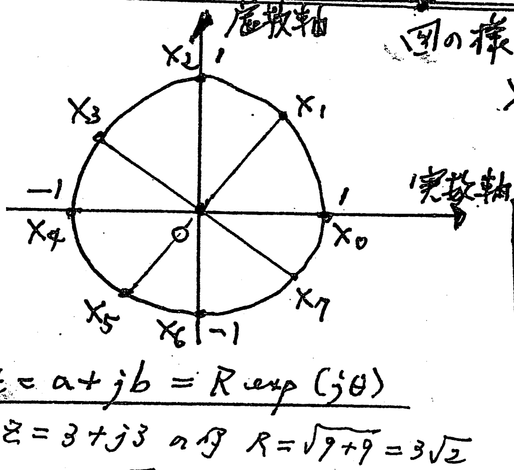
1.02 オイラー(Euler)の公式とは？ $\boxed{e^{\theta j}=\cos\theta+j\sin\theta}$ のことである!

p.89 $\theta=2k\pi\ (k=0,1,2,\cdots)$ の時、$e^{\theta j}=1$ となる。

今、$X_k=e^{2k\pi j/N}$ とすると、$(X_k)^N=e^{2k\pi j}=1$ となる。

従って、$X_k=e^{2k\pi j/N}\ (k=0,1,2,\cdots,(N-1))$ は $X^N=1$ のN個の根である。

$$\boxed{X^N=1\text{ の根は、}X_k=e^{2k\pi j/N}=\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)+j\sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\ (k=0,1,\cdots,N-1)}$$



図の様に半径1の円を原点を中心に描くと、$X^N=1$ の根は、半径1の円の円周に等間隔の角度で、N個並んでいる。(図は N=8の場合。)

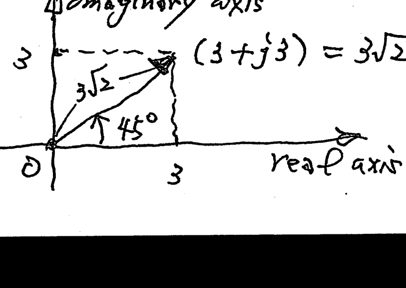
$X^N=a+jb$ の根は？ $a+jb=re^{\theta j}$ とすると、
$r=\sqrt{a^2+b^2}$; $\tan\theta=\frac{b}{a}$ として、for $k=0,1,\cdots,(N-1)$

$$X_k=\sqrt[N]{r}\,e^{\frac{(2k\pi+\theta)j}{N}}$$ となる!

1.03 $z=a+jb=R\exp(j\theta)$

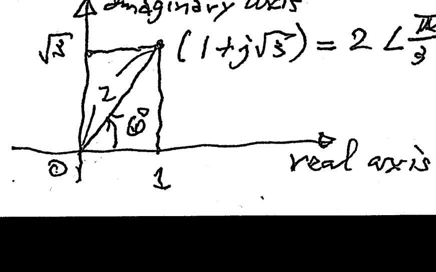
① $z=3+j3$ の時 $R=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ $\tan\theta=\frac{3}{3}=1\rightarrow\theta=45°=\frac{\pi}{4}$ (radian)

② $z=1+j\sqrt{3}$ の時 $R=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ $\tan\theta=\sqrt{3}\rightarrow\theta=60°=\frac{\pi}{3}$ (radian) ($\pi=180°$)



$(3+j3)=3\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$ とも記載する。

例題1 p.90



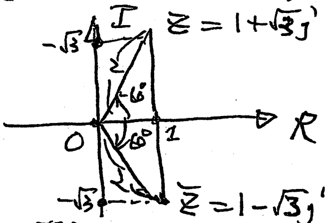
$(1+j\sqrt{3})=2\angle\frac{\pi}{3}$ とも記載する。

例題2 p.90

1.04 共役複素数とは？

複素数 $z=a+jb$ に対して、$\bar{z}=a-jb$ を共役複素数という。（$\bar{z}=a-jb$ と書く。）

$$\frac{1}{a+jb}=\frac{(a-jb)}{(a+jb)(a-jb)}=\frac{a-jb}{a^2+b^2}$$ となる。



（複素数）（その共役複素数）＝（絶対値）^{2} となる。

$(a+jb)(a-jb)=a^2+b^2=|a+jb|^2$ である。

$z=2e^{j60^\circ}$ の時、$\bar{z}=2e^{-j60^\circ}$ となる。

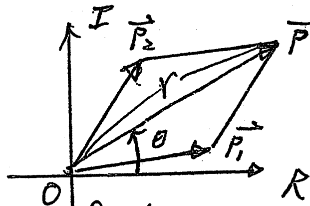
この場合、

$$\begin{cases} z=2e^{j60^\circ}=2\angle 60^\circ=2\angle\frac{\pi}{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)=1+\sqrt{3}j \\ \bar{z}=2e^{-j60^\circ}=2\angle -60^\circ=2\angle-\frac{\pi}{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-j\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)=1-\sqrt{3}j \end{cases}$$

1.05 複素数の加減演算

複素数は要素数2のベクトル $z=z[\,]$ に一対一対応する。

P92 従って、複素数の加減演算はベクトルと同じである！



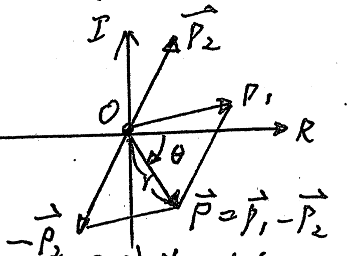
（加算の場合）

$$\vec{P}=\vec{P_1}+\vec{P_2}\quad\left(\begin{aligned}&P_1=\dot{P}_1=\vec{P_1}=P_1[\,]=(a_1,\ b_1)\\&P_1=\dot{P}_2=\vec{P_2}=P_2[\,]=(a_2\ b_2)\end{aligned}\right)$$

$$P=P_1+P_2=\dot{P}_1+\dot{P}_2=\vec{P_1}+\vec{P_2}=P_1[\,]+P_2[\,]=P[\,]$$

$P=P_1+P_2=P[\,]=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$ となる。

図の様に、平行四辺形の対角線ベクトル $\vec{P}$ となる。



（減算の場合）

$\vec{P}=\vec{P_1}-\vec{P_2}=(a_1-a_2,\ b_1-b_2)$ となる。

いずれにせよ $\vec{P}=\vec{P_1}\pm\vec{P_2}$ として、$\vec{P}$ のベクトル成分を求め、

$\vec{P}=[a,b]=Re^{\theta j}$ $\left(R=\sqrt{a^2+b^2},\ \tan\theta=\frac{b}{a}\right)$ となる。

$(a=a_1\pm a_2\ ;\ b=b_1\pm b_2)$

例 $P_1=20+j40$ $P_2=15+j10$ の場合　$P=P_1+P_2=35+j50$

$R=|P|=\sqrt{35^2+50^2}=5\sqrt{7^2+10^2}=5\sqrt{149}\simeq 61$

$\tan\theta=\frac{50}{35}=1.429\longrightarrow\theta\simeq 55^\circ$

$P=P_1-P_2=5+j30$ の場合　$R=|P|=\sqrt{5^2+30^2}=5\sqrt{1+6^2}=5\sqrt{37}\simeq 30.4$

$\tan\theta=\frac{30}{5}=6\longrightarrow\theta\simeq 80.6^\circ$ となる。

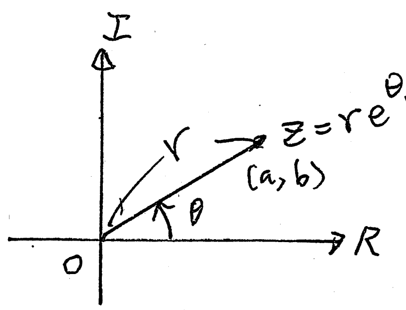
1.06 複素数の乗除算は平面ベクトルの回転に対応する。

わり算は p.97〜

$$\left.\begin{aligned}\vec{P}&=a+bj=R_P\exp(\theta_P j)\\ \vec{Q}&=c+dj=R_Q\exp(\theta_Q j)\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\vec{P}\times\vec{Q}=(ac-bd)+(ad+bc)j\\&\vec{P}\div\vec{Q}=\frac{a+bj}{c+dj}=\frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)j}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

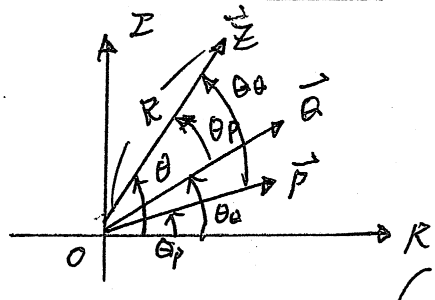
$$\left(\begin{aligned}\vec{P}\times\vec{Q}&=R_PR_Q\exp((\theta_P+\theta_Q)j)\\ \vec{P}\div\vec{Q}&=\left(\frac{R_P}{R_Q}\right)\exp((\theta_P-\theta_Q)j)\end{aligned}\right)$$

⟸（この2つを複素数平面で表示すると、直感的にベクトルの回転である事に気がつく！）



（一般に複素数 $z = a + bj = re^{\theta j} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ は平面上の点として表記できる。
（$r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\tan\theta = \frac{b}{a}$））

1.07 複素数のかけ算の場合



$\vec{z} = \vec{P} \times \vec{Q} = R_P \exp(\theta_P j)\, R_Q \exp(\theta_Q j)$

$\vec{z} = R_P R_Q \exp((\theta_P + \theta_Q) j)$

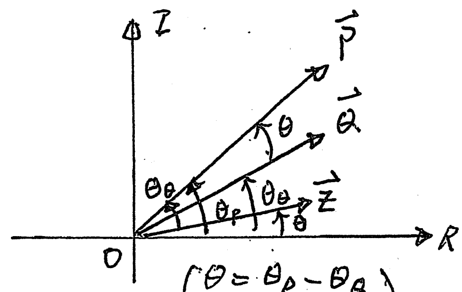
$\vec{z} = R \exp(\theta j)$ として.

$R = R_P R_Q$; $\theta = \theta_P + \theta_Q$ となる.

（ベクトル $\vec{Q}$ を θ_P だけ回転させて $\vec{z}$ となる。
また ベクトル $\vec{P}$ を θ_Q だけ回転させて $\vec{z}$ となる.）

1.08 複素数の割り算の場合

（$\vec{z} = \vec{P} \div \vec{Q}$）の場合.



$\begin{pmatrix} \theta = \theta_P - \theta_Q \\ \theta_P = \theta + \theta_Q \end{pmatrix}$

$\theta_Q - \theta_P = -\theta$

$\theta = \theta_P - \theta_Q$ となる. すなわち図に於いて. $\theta_P = \theta + \theta_Q$ である.

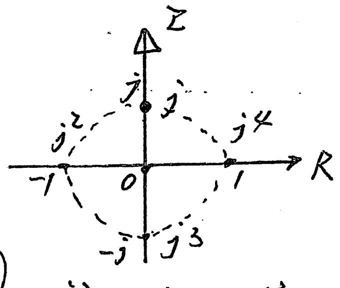
$\vec{z} = \vec{P} \div \vec{Q} = \dfrac{R_P \exp(\theta_P j)}{R_Q \exp(\theta_Q j)} = \left(\dfrac{R_P}{R_Q}\right) \exp((\theta_P - \theta_Q) j)$

$\vec{z} = R \exp(\theta j)$ として. $R = \dfrac{R_P}{R_Q}$; $\theta = \theta_P - \theta_Q$ となる.

ベクトル $\vec{P}$ を 角度 θ_Q だけ 負（時計まわり）に回転させて $\vec{z}$ となる

ベクトル $\vec{Q}$ を角度 θ_P だけ 負（時計まわり）に回転させると.
（角度が（$-\theta$）となる. ひき算は交換法則が成り立たない！ 割り算も交換法則が成り立たない！（$a-b \neq b-a$
$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$））

1.09 虚数 j, j^2, j^3, j^4 の複素平面上の点は



$\begin{pmatrix} j^2 = -1 \\ j^3 = -j \\ j^4 = 1 \end{pmatrix}$ となる！

p.93〜94

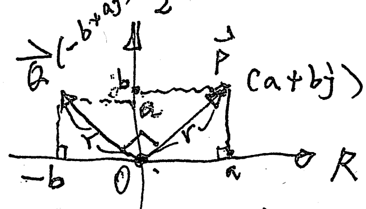
（j）のかけ算は、ベクトルを $\frac{\pi}{2}$ だけ正（時計と反対まわり）に回転させることに対応する。

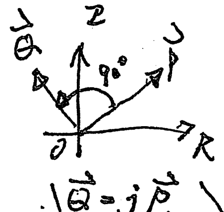
（例） $j^2 = -1$; $j^3 = -j$; $j^5 = j$; $\frac{1}{j^2} = -1$; $j^2 \times j^3 = j^5 = j$;

$(j^4)^2 = j^8 = j^4 = 1$ $\quad \frac{j^7}{j^3} = j^4 = 1$ （$j^4 = 1$ を覚えておくこと！）

$\vec{P} = (a + bj)$ に j をかけた場合はどうなるか？

$\vec{Q} = (a + bj)\, j = -b + aj$





＜$\vec{P}$ と $\vec{Q}$ の内積の定義＞を使って確認できる。

（$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |P||Q| \cos(\theta) = -ab + ab = 0$
$\theta = \frac{\pi}{2}$ となる!!）

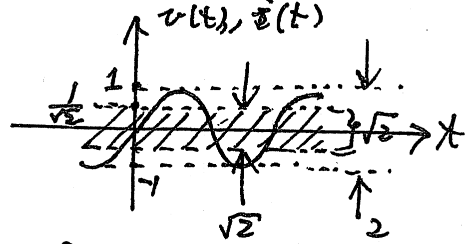
$\vec{Q} = j\vec{P}$ の意味

（j は、90度回転を意味する）

1.10 正弦波交流の複素数表記 p.98～

$$\begin{cases} 電圧\ v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \\ 電流\ i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$ とする。

(その平均出力は $\frac{V_m}{\sqrt{2}}$, $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ となる。この値を実効値と呼ぶ)



(正弦波関数値の時間平均実効値は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である)

慣例により 複素数の虚数部に注目し、

$$\begin{pmatrix} 電圧\ v(t) \sim \frac{V_m}{\sqrt{2}} \exp(\theta j) \\ 電流\ i(t) \sim \frac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(\theta j) \end{pmatrix}$$ に対応させる。

例① 2つの電流 $i_1(t)$ と $i_2(t)$ の実効値が $I_1 = 3A$, $I_2 = 2A$ の今、また、移相が $+60° = +\frac{\pi}{3}$ I_2 が進んでいる今、その合成電流 $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ の実効値 I の値は、

$$I = I_1 + I_2 \exp(\theta j) = 3 + 2 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{3} j\right)$$

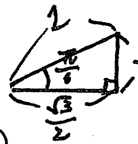
$$I = 3 + 2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + \sqrt{3} j$$ となるから、

$$|I| = \sqrt{16+3} = \sqrt{19} = 4.36A$$ となる。 例題9 p.99

例② $i(t) = 20\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = I_m \sin(\omega t + \theta)$ の今は、 $\theta = \frac{\pi}{6}$, $I_m = 20\sqrt{2}$ として、

(直交座標表示) $\frac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(\theta j) = 20 \exp\left(\frac{\pi}{6} j\right) = (20)\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt{3} + j) = 10\sqrt{3} + 10j$ [A]

(極座標表示) では、 $\frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \theta = 20 \angle \frac{\pi}{6}$ と表記する。



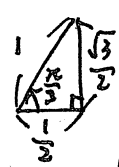
$$\exp\left(\frac{\pi}{6} j\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + j)$$

例題10 p.99

例③ 直交座標表示で $I = 1 + j\sqrt{3}$ (A) の電流の瞬時値 $i(t)$ は、

$$(実効値) = |I| = \sqrt{1+3} = 2A = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(\theta j)$ として、



$$\tan\theta = \sqrt{3} \to \theta = \frac{\pi}{3} = 60°$$

$I_m = 2\sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$i(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

例題11 p.100

$$\boxed{i(t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \longleftrightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(\theta j)}$$

(瞬時値表記)　　　(直交座標表記)

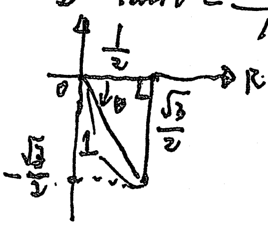
1.11 直角座標表示の電流 I_1 と I_2 の合成電流 $I = I_1 + I_2$ の計算例

実戦① p.100

$I_1 = 10A$　$I_2 = 5(1 - \sqrt{3} j)$ A とすると、

$$I = I_1 + I_2 = 15 - 5\sqrt{3} j \qquad |I| = \sqrt{15^2 + (5\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{9+3} = 10\sqrt{3}\ A$$

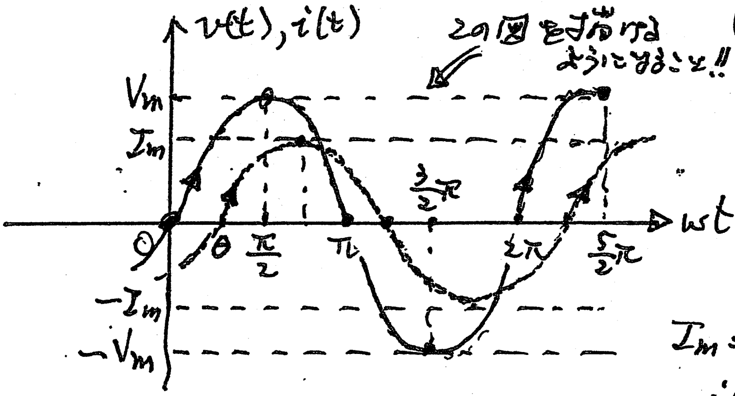
$$\tan\theta = \frac{-5\sqrt{3}}{15} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \to \theta = -\frac{\pi}{6}$$



$$\begin{bmatrix} (合成電流の直角座標表示) = 15 - 5\sqrt{3} j \\ (合成電流の極座標表示) = 10\sqrt{3} \exp\left(-\frac{\pi}{6} j\right) = 10\sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} \\ (合成電流の瞬時値表示) = 10\sqrt{6} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$$

1.12 電圧 $v(t)$ を基準とする電流 $i(t)$ の相対波形図を描く． p.101 実戦 2

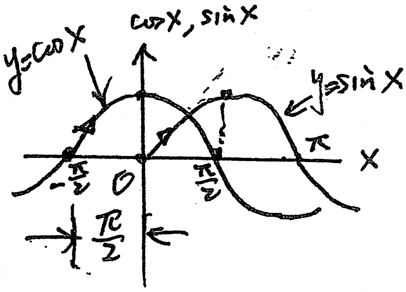
$v(t) = V_m \sin(\omega t)$ 　 $V_m = 200$ volt （$\because v(t)$ を基準にしているので．$v(t)$ の θ は $\theta = 0$ にして描く．）



（$i(t) = I_m \sin(\omega t - \theta)$ として描くと，左図の様になる．$i(t)$ の波形が θ だけ位相 (phase) が，$v(t)$ より遅れていることになる…）

$I_m = 5A$ で $\theta = \frac{\pi}{3}$ の時，
$i(t) = 5\sin(\omega t - \frac{\pi}{3})$ となる．

1.13 $v(t) = V_m \sin(\omega t - \alpha)$ と $i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta)$ の移相差



まず，$y=\cos x$ と $y = \sin x$ の関数を比較する．
$\sin x$ は $\cos x$ より移相が $\frac{\pi}{2}$ 遅れている!!
$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ である!! 　 p.102 実戦 3
$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ でもある．

従って，$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta) = I_m \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})$ となる．

（$v(t) = V_m \sin(\omega t - \alpha)$ は基準より位相 α だけ遅い．
$i(t) = I_m \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})$ は基準より位相 $(\frac{\pi}{2} + \beta)$ だけ早い．）

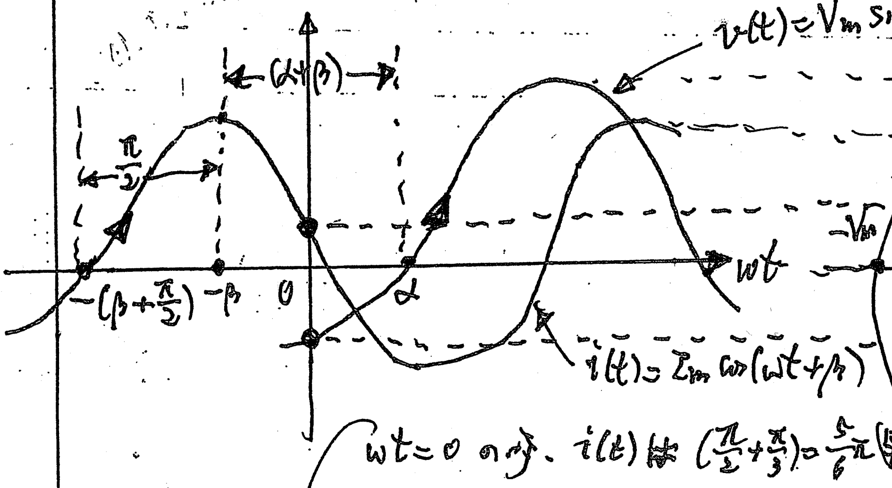
この電圧 $v(t)$ に対しては，電流 $i(t)$ は，

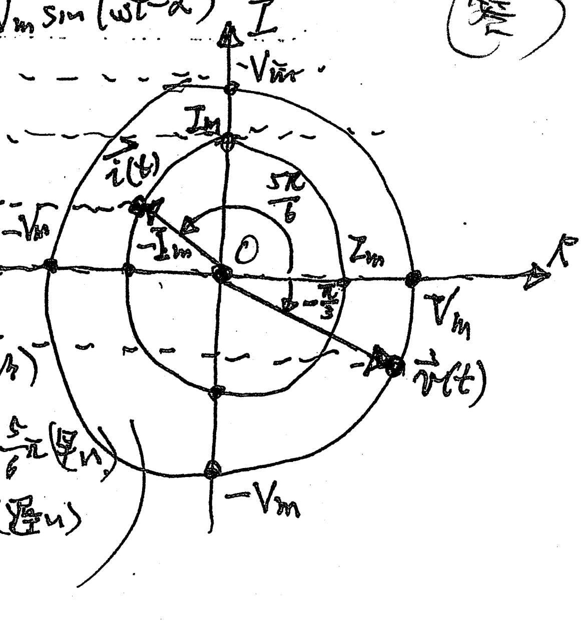
$(\frac{\pi}{2} + \beta) + \alpha$ だけ位相が早い．

今，$\alpha = \frac{\pi}{3}$，$\beta = \frac{\pi}{3}$ とすると，$(\frac{\pi}{2} + \beta) + \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{3+4}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

$i(t)$ の位相が $v(t)$ の位相より $\frac{7}{6}\pi$ (radian) 進んでいる．

答





（$\omega t = 0$ の時，$i(t)$ は $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \frac{5}{6}\pi$（早い）
$v(t)$ は $(-\alpha) = -\frac{\pi}{3}$（遅い）
$\Delta\theta = \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{7}{6}\pi$（早い））