**************************************************

ロボット工学基礎　演習問題　10

**************************************************

10.01　DOF=1のManipulator(Robot Arm)の３つの基本構造

①Potentiometer②Servo Mortor③減速機

について説明しなさい。

10.02　DOF=1、長さL、重さｍ のRobot Armの原動servo motorが

発生させる必要のある回転トルクτ(θ)の運動方程式を導け。

10.03　減速機の歯数比nとServo Motorの負荷の関係を説明しなさい。

10.04　減速機の２つの役割について説明しなさい。

10.05　DOF=1のRobot Arm の制御系を図示せよ。

10.06　Laplace 変換とは？ その性質は？

10.07　次のDCDL code で定義されるLCR( )回路の回路図を描き、

電圧電流を支配する微分方程式を導き、Laplace変換式を求めよ。

define LCR( ) { input E(t), GND; output V1(t),V2(t),I(t);

L(E,V1);C(C1,V2);R(V2,GND); }

10.08　次のDCDL code で定義されるFeed Back 制御系の Block図を描きなさい。

define Block( ) { input x(s);output y(s);

{x(s),F(s)}SUB(1)->C(s);C(s)G1(s)->A(s);{A(s),y(s)}SUB(2)->E(s);

E(s)G2(s)->u(s);u(s)G3(s)->y(s)=B(s);B(s){H(s)=1/G3(s)}->F(s);}

このFeed Back 制御系の伝達関数を求めなさい。

10.09　慣性モーメントとDumping係数を考慮した DOF=1 の

一軸manipulatorの Block線図を描き、その伝達関数を求めよ。

10.10　比例制御とは？ 比例制御係数 Kp の値が大きいとどんな問題があるか？

10.11　いろいろな 関数 f(t)の Laplace 変換 F(s)をまとめよ。

10.12　Dumping係数を考慮する場合としない場合で、

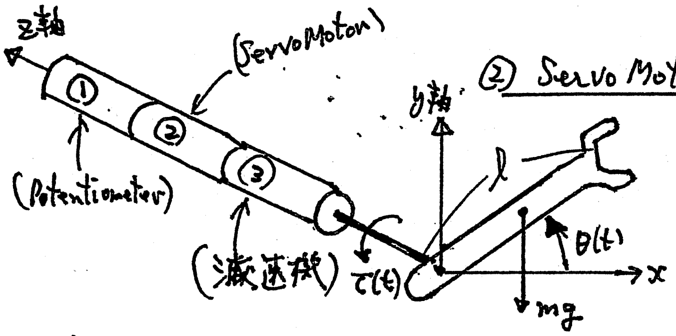
ばねにつながれた質量ｍの運動方程式について説明せよ。

*****************************************************************

10.01 DOF=1 のManipulatorの詳細構造　（教科書 オーム社 pp.129-163）

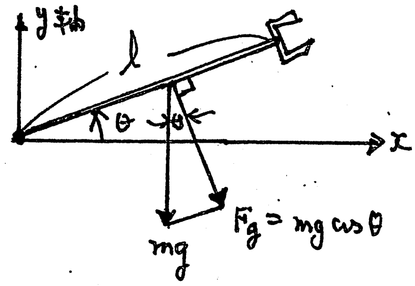
自由度1のRobot Armのことである。Robot Armの回転角度 $\theta(t)$ を制御したい。

3 の構造で構成される。① Potentiometer（回転角度 $\theta(t)$ を検知して、電気信号（電圧値又は電流値）に換算する。（p.133参照））




② Servo Motor　入力電流 $i(t)$ に比例して、電気Motorの回転力トルク $\tau_m(t)$ が生じる。$\tau_m(t) = K_t\, i(t)$ となる。電流が大きくなると、回転トルクの大きさは飽和してくる。逆起電力が発生するがここでは無視している。

10.02 回転トルクの運動方程式




③ 減速機　歯車により、回転速度を変える。モーター側の歯車の歯数を $k_1$ として、Robot Arm側の歯車の歯数を $k_2$ とすると、減速比 $n = \frac{k_2}{k_1} > 1$ となる。減速比が大きい程、Robot Armの回転はゆっくりになるが、力強く回転する!!

ServoMotorのおかげで、重力(mg)や他の重量にさからって、時計と反対回りが正の回転トルク $\tau(t)$ が働いて、Robot Armが回転できる。重力(mg)に打ち勝つための回転トルクの大きさ、少くとも、ServoMotorはまず、この大きさ以上の回転トルクを発生させなければならない。

$$\tau_g(t) = \left(\frac{l}{2}\right)(F_g) = \left(\frac{l}{2}\right) mg\cos\theta$$

他にも、回転摩擦力が、回転速度 $\frac{d\theta}{dt}$ に比例して働く。$\tau_R(t) = D_r \frac{d\theta}{dt}$。

そして、このRobot Armにも慣性Moment $I = \frac{4}{3} m l^2$ があり。（p.69 例題4-6）

$$\tau_I(t) = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{4}{3} m l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

の回転トルクをモータが発生する必要がある。

モーターが発生させないといけない回転トルクの総和

$$\tau(t) = \tau_g(t) + \tau_R(t) + \tau_I(t) = \overset{\tau_I}{\frac{4}{3} m l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}} + \overset{\tau_R}{D_r \frac{d\theta}{dt}} + \overset{\tau_g}{\left(\frac{l}{2}\right) mg\cos\theta}$$

10.03 減速機のおかげでServoMotorの負荷がへる。　（See p.131 Eq.7-1）

直感的に歯車の歯数比＝減速比＝$k_1/k_2 > 1$ のおかげで

モーターの負荷が $n = k_1/k_2$ が大きい程減少するのはわかるが、実際は $\frac{1}{n^2}$ になる!!

Robot Armがついていない時、Servo Motorがfreeの時は、自分だけを回転させれば良いので、Servo Motorの負荷は、$\tau_m(t) = I_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \tau_{Rm}\frac{d\theta_m}{dt^2}$ である。

Robot Armがつくと、これに、$\tau_{RA}(t)$ がつく。

$$\tau_m(t) = I_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \tau_{Rm}\frac{d\theta_m}{dt^2} + \tau_{RA}(t)$$

**10.04** 減速機の役割りは2つある。

① まず回転速度が $1/n$ になる。 $\theta = \dfrac{\theta_m}{n}$ とする。 $\left(n = \dfrac{r_2}{r_1} > 1\right)$

$\theta$ は Robot Arm 側での回転角度で、$\theta_m$ は Servo Motor 側の回転角度。

② 回転モーメントが $n$ 倍になる!! 力が強くなる。回転力が増加する。

$$\tau(t) = (n)\,\tau_{RA}(t)$$

($\tau_{RA}(t)$ は Servo Motor から見た負荷、$\tau(t)$ は、Robot Arm がもらう回転トルク量)

$$\tau(t) = \frac{4}{3} m l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + D_r \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{l}{2}\right) mg\cos\theta$$ だった..

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{n}\frac{d^2\theta_m}{dt^2} \;;\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{n}\frac{d\theta}{dn} \;;$$ より。 (See p.131~132)

$$\tau_{RA}(t) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{4}{3} m l^2 \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + D_r \frac{d\theta_m}{dt}\right] + \frac{1}{n}\left[\left(\frac{l}{2}\right) mg\cos\theta\right]$$

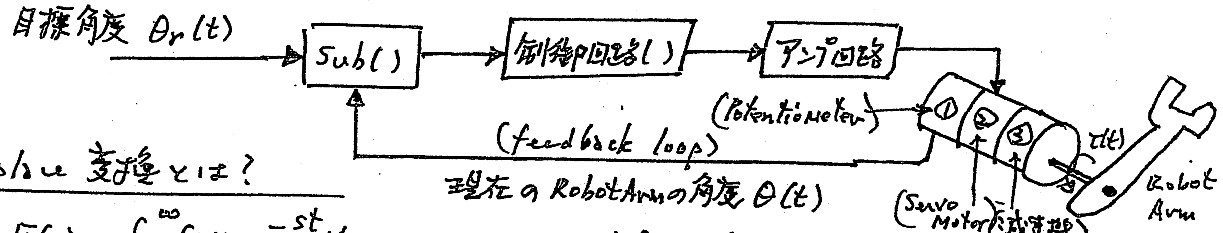
$$\tau_m(t) = \left[I_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \tau_{Rm}\frac{d\theta_m}{dt}\right] + \frac{1}{n^2}\left[\frac{4}{3} m l^2 \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + D_r\frac{d\theta_m}{dt}\right] + \frac{1}{n}\left[\left(\frac{l}{2}\right) mg\cos\theta\right]$$

したがって、減速機のおかげで、Robot Arm の重力成分負荷は $\left(\frac{1}{n}\right)$ に、

Robot Arm の回転トルク(目標とする回転力)に対しての負荷は $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ になる!!

**10.05** Robot Arm の制御系

(See p.133)




**10.06** Laplace 変換とは?

$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ のことである。 $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ と書く。

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) \;;\quad \mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)\,dt\right) = \frac{1}{s}F(s)$$ となる.!!

一般に、 $A\, f(t) + B\,\dfrac{df(t)}{dt} + C\int_0^t f(t)\,dt = g(t)$ の時、

$$(A)\,F(s) + (B)(s)\,F(s) + (C)\left(\frac{1}{s}\right)F(s) = G(s)$$ より。

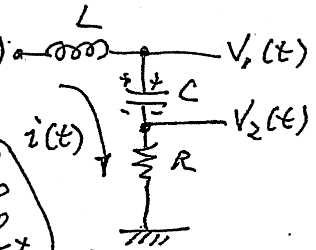
$$F(s) = \frac{G(s)}{\left(A + sB + \frac{1}{s}C\right)}$$ となる。 微積分計算がわり算になる。

Robot Arm の場合、回転トルク $\tau(t)$ は 回転速度 $\dfrac{d\theta}{dt}$ または回転角度 $\theta(t)$ の関数と考えると、 $\tau(t) = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + D_r\dfrac{d\theta}{dt} + \underbrace{\frac{l}{2} mg\cos\theta}_{\text{これを無視すると..}}$ より。

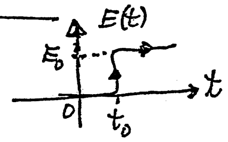
$$\tau(s) = (s^2 I + s D_r)\,\theta(s)$$ より、

(伝達関数) $= \dfrac{\theta(s)}{T(s)} = \dfrac{1}{Is^2 + Ds}$ となる。 $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\text{の伝達関数}\right) = \dfrac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_s}{T(s)} = \dfrac{1}{Is^2 + D} = \dfrac{s\theta(s)}{T(s)}$ となる。

## 10.07. RCL回路の復習 (LCR回路とも言う!) (p.140 参照)




初期条件.
$E(t)=0$
$V_1(t)=0$
$V_2(t)=0$
for $t<t_0$ とする...




$$\begin{cases} Q = C\,(V_1 - V_2) \\ i(t) = \dfrac{dQ}{dt} = C\left(\dfrac{dV_1}{dt} - \dfrac{dV_2}{dt}\right) \\ E(t) - V_1(t) = L\,\dfrac{di}{dt}\ ;\quad i(t) = \dfrac{V_2(t)}{R}\ ; \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} V_1(t) = ? \\ V_2(t) = ? \end{pmatrix}$

$i(t)$が求まれば、 $V_2(t) = R\,i(t)$ より $V_2(t)$が求まる.
$V_1(t) = E(t) - L\dfrac{di}{dt}$ より $V_1(t)$も求まる.

$Q(t) = C\,(V_1(t) - V_2(t))$ より $Q(t)$も求まる.

教科書(p.140)の例題では. $Q(t)$に関する問題になっているが、まず電流 $i(t)$を求める.

$$i(t) = C\frac{dV_1}{dt} - C\frac{dV_2}{dt} = C\frac{dV_1}{dt} - CR\frac{di}{dt}\ ;\quad C\frac{dV_1}{dt} = i(t) + CR\frac{di}{dt}$$

$$E(t) = V_1(t) + L\frac{di}{dt}\ ;\quad \frac{dE}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2}\ ;$$

PID制御 D I P

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{1}{C}i(t) + R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2}} \longleftrightarrow \left(E = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + Ri\right)$$ とも書ける.

$$sE(s) = \frac{1}{C}i(s) + Rs\,i(s) + s^2L\,i(s)$$

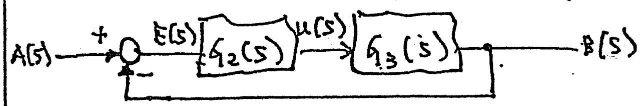
$$= \left(\frac{1}{C} + sR + s^2L\right)i(s) \qquad i(s) = \frac{sC}{s^2CL + sCR + 1}E(s)$$ になる.

この微分方程式を そのまま 時間の関数として. $i(t)$ を求めるのは大変だ!!

$i(t) = \dfrac{dQ}{dt}$ より $i(s) = s\,Q(s)$ より

$$Q(s) = \frac{C\ E(s)}{s^2CL + sCR + 1}$$ ともなる...

## 10.08. 例題7-4 Block図の等価変化とは? (p.145)

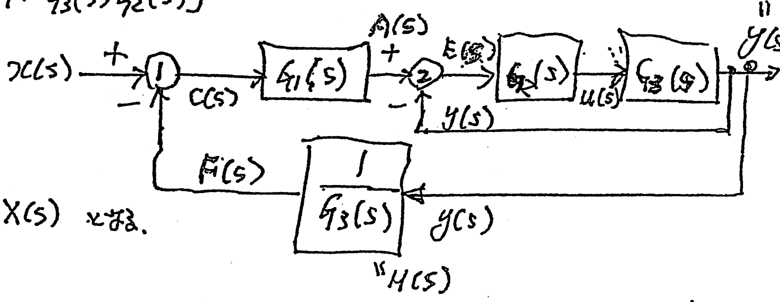



$$\begin{pmatrix} E(s) = A(s) - B(s) \\ u(s) = G_2(s)\,E(s) \\ B(s) = G_3(s)\,u(s) \end{pmatrix}$$

$$B(s) = G_3(s)u(s) = G_3(s)G_2(s)E(s) = G_3(s)G_2(s)\{A(s) - B(s)\}$$

$$B(s)\left[1 + G_3(s)G_2(s)\right] = G_3(s)G_2(s)A(s)$$

$$B(s) = \frac{G_3(s)G_2(s)}{1 + G_3(s)G_2(s)}A(s)$$

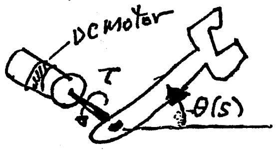



$$y(s) = \frac{G}{1+GH} = \frac{\dfrac{G_3G_2G_1}{1+G_3G_2}}{1 + \dfrac{G_2G_1}{1+G_3G_2}}X(s)$$ となる.

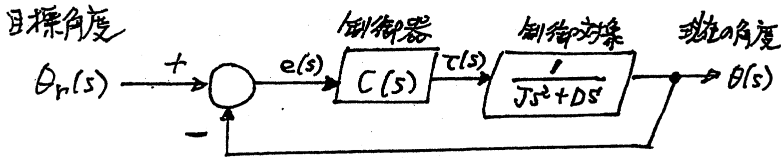
$$y(s) = \frac{G_3(s)G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s) + G_3(s)G_2(s)}$$ となる。(図7-16の式は間違っている ??)

(FeedBack 制御)　　pp.148~155

## 10.09 一軸Manipulator制御系のBlock線図（図7.11 p.141参照）




（図7-1 p.130参照）




$$\left(\begin{array}{l} \tau = J\dot{\omega} + D\omega \\ \tau = J\ddot{\theta} + D\dot{\theta} \\ \tau(s) = s^2 J\theta(s) + sD\,\theta(s) \\ \theta(s) = \dfrac{\tau(s)}{Js^2+Ds}\ ; \end{array}\right)$$

（J＝慣性モーメント、D＝damping係数）

$$e = \theta_r(s) - \theta(s)$$

$$\theta(s) = \frac{C(s)}{Js^2+Ds}\,e = \frac{C(s)\{\theta_r(s)-\theta(s)\}}{Js^2+Ds}$$

$$\tau(s) = C(s)\,e(s) = C(s)\{\theta_r(s)-\theta(s)\}\ ;$$

## 10.10 比例制御とは？（p.149〜）

$C(s)=K_p=$ 定数の時、P（＝proportional）制御と言う。

$$\theta(s) = \frac{C(s)}{Js^2+Ds+C(s)}\,\theta_r(s) = \frac{K_p}{Js^2+Ds+K_p}\,\theta_r(s)$$ となる。

$$\theta(s) = \frac{(K_p/J)}{s^2+\left(\frac{D}{J}\right)s+\frac{K_p}{J}} = \frac{(K_p/J)}{\left(s+\frac{D}{2J}\right)^2+\left(\frac{K_p}{J}-\frac{D^2}{4J^2}\right)} = \frac{ac}{(s+b)^2+a^2}$$

$$b = +\frac{D}{2J}\ ;\quad a^2 = \frac{K_p}{J}-\left(\frac{D}{2J}\right)^2\ ;\quad ac = \frac{K_p}{J}\ ;$$

$$\theta(t) = c\,e^{-bt}\sin at$$ ；（$K_p$が大きいと、aの値が大きい）

$$\tau(t) = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt}$$

a＝固有角周波数 [rad/sec]
b＝減衰（damping）

※（早く目標値にしようと思うと、ある程度 $K_p$ を大きく取る必要がある。が、大きすぎると、Overshootが生じる…（図7-22 p.149））

$$\theta(s) = \frac{K_p}{Js^2+Ds+K_p} = \frac{(K_p/J)}{s^2+\frac{D}{J}s+\frac{K_p}{J}} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\frac{K_p}{J}=\omega_n^2\ ;\quad \frac{D}{J}=2\zeta\omega_n\ ;\quad b=\frac{D}{2J}=\zeta\omega_n\ ;$$

$$a^2 = \frac{K_p}{J}-\left(\frac{D}{2J}\right)^2 = \omega_n^2-\zeta^2\omega_n^2 = (1-\zeta^2)\,\omega_n^2$$

$$\theta(t) = c\,e^{-bt}\sin at = c\,e^{-\zeta\omega_n}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)$$

$$c = \frac{1}{a}\frac{K_p}{J} = \frac{\omega_n^2}{a} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$ となる…中々、大変だ！

Laplace変換とは？

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$ のこと！

| | f(t) | F(s) |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{s}$ |
| 2 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 3 | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ ← $\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)$ |
| 4 | $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| 5 | $\sin at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| 6 | $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| 7 | $e^{bt}\sin at$ | $\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$ |
| 8 | $e^{bt}\cos at$ | $\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ |
| 9 | $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| 10 | $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| 11 | $te^{at}$ | $\frac{1}{(s-a)^2}$ |
| 12 | $t\sin at$ | $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 13 | $t\cos at$ | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 14 | $\frac{\sin at}{t}$ | $\tan^{-1}\frac{a}{s}$ |
| 15 | $\delta(t)$ | 1 |

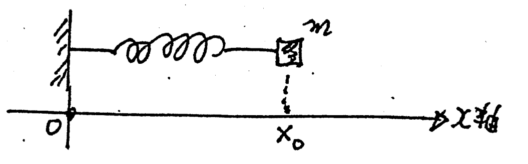
## 10.11. Laplace変換の対応関係（中々大変だ…どう導くのだろうか???）

$$\mathcal{L}\left(t^n e^{-at}\right) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\sin(\omega t+\theta)\right) = \frac{\omega\cos\theta+(s+a)\sin\theta}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\cos(\omega t+\theta)\right) = \frac{(s+a)\cos\theta-\omega\sin\theta}{(s+a)^2+\omega^2}$$

## 10.12 ばねの物理学 (pp. 135〜136)




$$F = m\frac{d^2X}{dt^2} = -k(x - x_0)$$

at $t=0$, $X = X_1$ とする. $X(t)$ を求めなさい.
(また. $t=0$ の分. $\frac{dX}{dt} = 0$ とする.)

$X(t) = A\cos(at) + B\sin(bt) + C$ と仮定すると.

$$\begin{cases} X(0) = A + C = X_1 \\ \frac{dX}{dt} = -aA\sin(at) + bB\cos(bt) \ ; \ \left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0} = bB = 0 \ ; \\ X(t) = A\cos(at) + (X_1 - A) \ \text{となる.} \end{cases}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -a^2A\cos(at) \ ; \quad m\frac{d^2X}{dt^2} = -ma^2A\cos(at) = (-k)\left[A\cos(at) + X_1 - A - X_0\right]$$

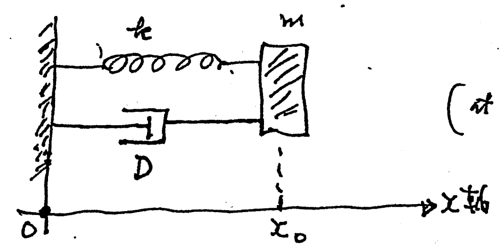
$$ma^2 = k \ ; \quad A = (X_1 - X_0) \ ; \quad a = \sqrt{\frac{k}{m}} \ ; -$$

$$X(t) = (X_1 - X_0)\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) - 1\right] + X_1 \quad \text{となる.}$$

この場合は摩擦 (damping) がないので永久に揺れ続ける.

### 摩擦 (damping) がある場合

$$F = m\frac{d^2X}{dt^2} = -D\frac{dX}{dt} - k(X - X_0) \qquad \left(y(t) = x(t) - X_0 \ \text{とする.}\right)$$




$$m\frac{d^2y}{dt^2} + D\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

(at $t=0$, $X = X_1$ and $\frac{dX}{dt} = 0$ とする)

$y = A\exp(\alpha t)$ と仮定すると.

$(m\alpha^2 + D\alpha + k)A\exp(\alpha t) = 0$ となる.

すなわち. $m\alpha^2 + D\alpha + k = 0$ より

$$m\left(\alpha + \frac{D}{2m}\right)^2 = \frac{D^2}{4m} - k \ ; \quad \alpha = -\frac{D}{2m} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4mk}}{2m} \ ;$$

Case ① $D^2 \geq 4mk$ の時. $\alpha_1 = -\frac{D}{2m} - \frac{\sqrt{D^2-4mk}}{2m} < 0$; $\alpha_2 = -\frac{D}{2m} + \frac{\sqrt{D^2-4mk}}{2m} < 0$;

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + A_1\exp(\alpha_1 t) + A_2\exp(\alpha_2 t) \\ x(0) = x_1 = x_0 + A_1 + A_2 \\ \frac{dX}{dt} = \alpha_1 A_1\exp(\alpha_1 t) + \alpha_2 A_2\exp(\alpha_2 t) \end{cases} \qquad \left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=0} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} A_1 + A_2 = x_1 - x_0 \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}A_1$$

$$\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)A_1 = (x_1 - x_0)$$

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{(x_1 - x_0)}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \\ A_2 = \dfrac{\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}(x_1 - x_0) \end{cases}$$

(わぁ−大変な計算になる!!)

Case ② $D^2 < 4mk$ の時は、振動しながら $x$ が $x_0$ におさまる!!
いずれにせよ、外力がないと、$x \simeq x_0$ におさまる。