
ロボット工学基礎 演習問題 02

教科書 第2章 pp. 11~30

2.01 DOF=2 の Robot Arm の位置と姿勢について説明せよ。

2.02 三角関数の定義を説明せよ。

2.03 三角関数の波形を図示し、位相(phase)について説明せよ。

2.04 加法定理を導け。

2.05 DOF=2 の Robot Arm の順運動学について説明せよ。

{ $L_1=2, L_2=2, \theta_1=45^\circ, \theta_2=-30^\circ$ } の場合を図示し、Handの高さを求めよ。

2.06 余弦定理を導け。

2.07 DOF=2 の Robot Arm で { $L_1=2, L_2=2, \theta_1=0^\circ$ } の場合で、

原点からHandまでの距離 $D=2\sqrt{3} \sim 3.46$ の場合を図示し、姿勢角 θ を求めよ。

2.08 ベクトル $A[]$ とは？

2.09 ベクトルの内積を定義せよ。余弦定理との関係を説明せよ。

2.10 ベクトルの外積を定義せよ。余弦定理との関係を説明せよ。

2.11 Lorentz Force Law とは？

2.12 磁場ベクトル $B[]$ と電流ベクトル $I[]$ と

電線にかかる力ベクトル $F[]$ の関係を説明せよ。

2.13 複素数を行列式で表記し、その関係を説明せよ。

2.14 Robot Arm の回転行列とは？

2.15 逆行列式とは？逆回転行列とは？

2.16 DOF=1のRobot Arm の2度の回転 [$\theta_1=30^\circ, \theta_2=60^\circ$] 後のHandの座標を求めよ。

2.17 回転後の座標 (X_2, Y_2) から θ 回転前の座標 (X_1, Y_1) を、具体的な数字を使って求めよ。

2.18 回転モーメントとは？外積を使って定義せよ。

力が X軸に平行な場合と、Armに対して θ で力がかかっている場合で、

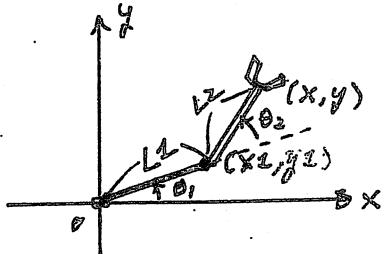
具体的な数字使って、力のモーメント $N[]$ 計算せよ。

2.19 貨車問題で、 $MA=10\text{Kg}, MB=4\text{Kg}$ とした時の、物体の加速度 a と

ひもにかかる張力 T の状態を、図示して、その値を計算せよ。

2.01 ロボットアーム (Robot Arm) の位置と姿勢

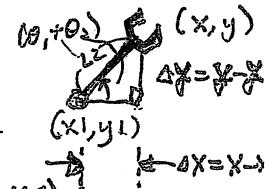
$$\begin{cases} \text{Arm} = \text{Joint } 1 \text{ から Joint } 2 \\ \text{Joint } = \text{節 (関節)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 = L_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = L_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = y_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

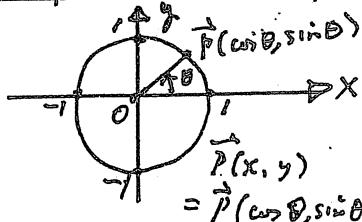
$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{(y - y_1)}{(x - x_1)}$$



* $(L_1, L_2, \theta_1, \theta_2)$ から (x_1, y_1) と (x, y) を求めることを「直運動学」といって

* 逆に (x, y) と (L_1, L_2) より (θ_1, θ_2) を求める事を「逆運動学」といって。
逆運動学の場合、 (θ_1, θ_2) の解は 1つだけではない。2つ以上もありえる。

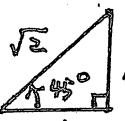
2.02 三角函数の定義



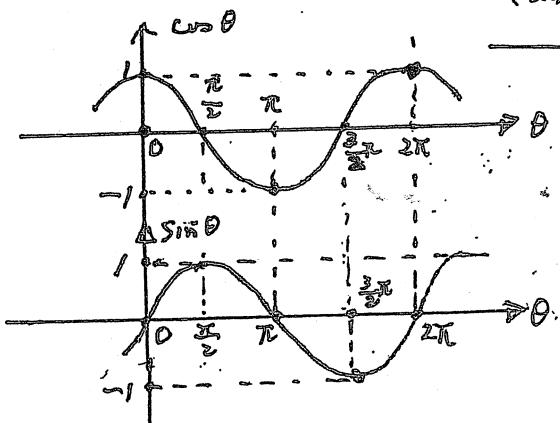
$$\vec{p} = p[\theta] = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta + j \sin \theta = \exp(j\theta)$$

(複素数と三角関数)

「複素平面上の単位円周上に点P(1, 0), P(-1, 0), P(0, 1), P(0, -1)」



2.03 三角函数の波形



$\sin \theta$ は $\cos \theta$ に $\frac{\pi}{2}$ = 90° 前進する
位相 (phase) が遅れている。

$$\sin \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$$

Eulerの公式を用いて

$$\begin{aligned} \exp(j\alpha) &= \cos \alpha + j \sin \alpha \\ \exp(j\beta) &= \cos \beta + j \sin \beta \end{aligned}$$

$$\exp(j(\alpha + \beta)) = \cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta)$$

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos \alpha & (\text{偶数回転}) \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & (\text{奇数回転}) \end{cases}$$

すなはち、実数部分と虚数部分を4倍して

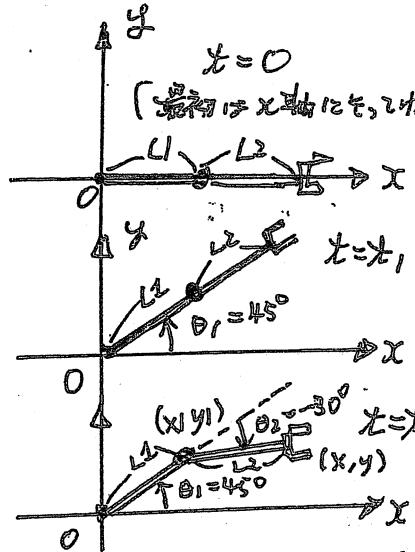
$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

です!!

2.04 指数法則

2.05 Robot Arm の 2 軸運動 $DOF=2$ の場合



$$\left(L_1 = 2\text{cm}, L_2 = 2\text{cm}; \theta_1 = 45^\circ; \theta_2 = -30^\circ \right) \text{ とします。}$$

$$\begin{cases} x_1 = L_1 \cos \theta_1 = (2) \cos 45^\circ = (2) \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ y_1 = L_1 \sin \theta_1 = (2) \sin 45^\circ = (2) \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x_1 = L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = 2 \cos(45^\circ - 30^\circ) = 2 \cos(15^\circ) \\ y - y_1 = L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 2 \sin(45^\circ - 30^\circ) = 2 \sin(15^\circ) \end{cases}$$

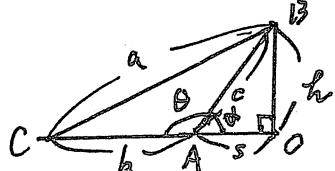
$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \text{ を代入!!}$$

$$\begin{cases} \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(15^\circ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin(15^\circ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2+1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \\ y = \sqrt{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \end{cases} \quad \text{端点 } h = y = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \approx 1.93 \text{ cm}$$

2.06 余弦定理を導いて。

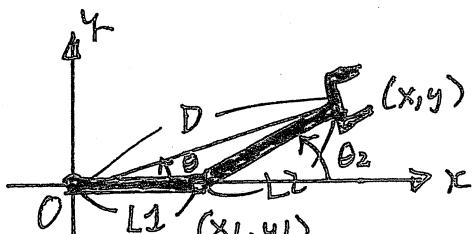


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta \quad \text{とします。}$$

$$\cos \theta = -\cos \alpha \quad \text{とします。} \quad a^2 = h^2 + (b+s)^2$$

$$h^2 = c \sin \alpha; s = c \cos \alpha; a^2 = h^2 + b^2 + s^2 + 2bs; a^2 = c^2 \sin^2 \alpha + b^2 + c^2 \cos^2 \alpha + 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha;$$

2.07 $\theta_1 = 0 - 90^\circ$: HAND の原点からの距離 D が $\approx 3.46 \text{ cm}$ です。



$$\theta_1 = 0^\circ \text{ とおきます。}$$

$$(D = 3.46 \text{ cm})$$

$$(L_1 = 2 \text{ cm})$$

$$(L_2 = 2 \text{ cm})$$

$$\begin{cases} x = x_1 + L_2 \cos \theta_2 \\ y = L_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (\tan \theta = \frac{y}{x})$$

$$D^2 = x^2 + y^2 = (L_1 + L_2 \cos \theta_2)^2 + (L_2 \sin \theta_2)^2$$

$$\begin{cases} D^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_2 = \frac{D^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} = \frac{(3.46)^2 - 4}{8} = \frac{(\frac{17}{2})^2 - 2}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \end{cases}$$

余弦定理を導いて計算しました！

めでたす。

$$(L_2)^2 = D^2 + (L_1)^2 - 2(D)(L_1) \cos \theta \quad \text{とします。}$$

$$\cos \theta = \frac{D^2 + (L_1)^2 - (L_2)^2}{2(D)L_1} = \frac{(3.46)^2 - 4}{2(3.46)(2)} = \frac{3.46}{4} = \frac{1.73}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad [\theta = 30^\circ]$$

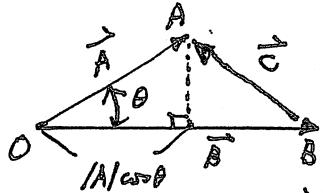
2.08 ベクトルとは？ $A[] = \vec{A}$ と表記する。

三次元空間の位置の座標 (x, y, z) はベクトル $\vec{P} = P[]$ と表記する。

この場合 $N=3$ で、 $P[1]=x$, $P[2]=y$, $P[3]=z$ の事である。

2.09 ベクトルの内積の定義 $\vec{A} \cdot \vec{B} = A[] \cdot B[]$ と表記する。

$$S = \vec{A} \cdot \vec{A} = A[] \cdot B[] = \sum_{i=1}^N A[i] B[i] \text{ の事である。}$$



$|\vec{A}|/|\vec{B}| \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{B}$ の意味がわかる！

$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$ とすると $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ となる。

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

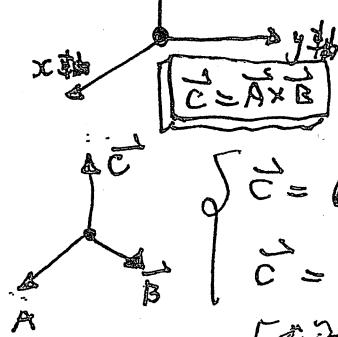
$$\begin{aligned} |\vec{C}|^2 &= \vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \\ \vec{C} \cdot \vec{C} &= \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} - 2 \vec{A} \cdot \vec{B} \text{ となる。} \\ C^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \text{ となり。} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (\text{余弦定理となる!})$$

2.10 ベクトルの外積の定義 $\vec{A} \times \vec{B} = A[] \times B[]$ と表記する。

左側

(ベクトル \vec{A} を x 軸、ベクトル \vec{B} を y 軸とすると。
 $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ は z 軸とされる。)



$$\vec{C} = (c_x, c_y, c_z) = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

3×3の
行列の
値を計算
する方法
と解説
が書かれている。

$$\begin{cases} \vec{C} = \begin{bmatrix} a_y a_z - a_z a_y \\ b_y b_z - b_z b_y \\ a_x b_z - a_z b_x \end{bmatrix} \vec{e}_x - \begin{bmatrix} a_x a_z - a_z a_x \\ b_x b_z - b_z b_x \\ a_y b_z - a_z b_y \end{bmatrix} \vec{e}_y + \begin{bmatrix} a_x a_y - a_y a_x \\ b_x b_y - b_y b_x \\ a_z b_y - a_y b_z \end{bmatrix} \vec{e}_z \\ \vec{C} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \end{cases}$$

「ベクトル回旋の法則」オーランド pp: 137~157 参照。

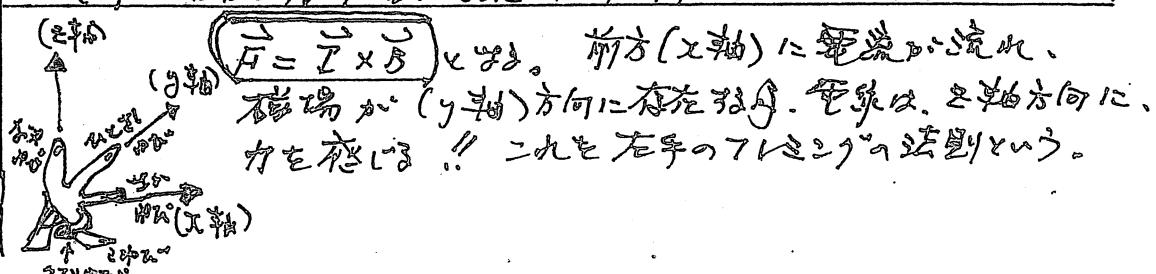
2.11 Lorentz Force Law とは？

電荷 +Q が 电場 \vec{E} と 磁場 \vec{B} の中で 感じる力 \vec{F} は $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ で 表される。

ここで、 \vec{v} は 电荷の 移動速度 である。



2.12 磁場にかかる力 \vec{F} は、电流の方向ベクトル \vec{I} と 磁場 \vec{B} の和では、



2.13 演算子を 2×2 行列で表すよ。

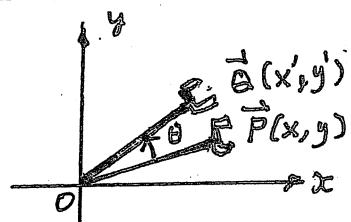
$$a+jb = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ と書ける。}$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(複素数のたし算・引き算・かけ算・わり算が
そのまま 2×2 行列でそのままたし算・引き算・
かけ算・わり算と同じで実行している。)

$$e^{j\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ を 回転行列と言ふ。} \quad \left(\begin{array}{l} \text{複素数のかけ算は} \\ \text{平面ベクトルの回転と} \\ \text{同じで実行する。} \end{array} \right)$$

2.14 ロボットアームの回転行列



Robot Arm が $P(x,y)$ から $Q(x',y')$ に回転した。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ です!!}$$

2.15 逆行列とは、逆回転行列とは?

$$\text{行列式の定義。} \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ です。}$$

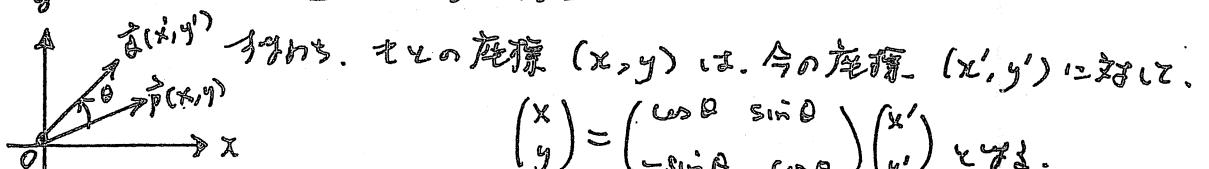
$$\text{つまり、逆行列とは } \text{inv} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ です。 } \text{inv} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{inv} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ です。また。det} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad-bc) \text{ です。}$$

$$(\text{逆行列}) = \text{inv} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a^2+b^2$$

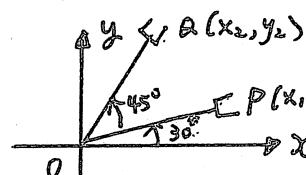
(回転行列)の逆行列。

$$\text{inv} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ です。}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ です。}$$

2.16 $\theta_1=30^\circ, \theta_2=45^\circ$ の時 $DOF=1$ の Robot Arm の x 座標は?



$$x_2 = L, \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

$$y_2 = L, \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$x_1 = L, \cos 45^\circ$$

$$y_1 = L, \sin 45^\circ$$

$$L_1 = 1 \text{ の } \begin{pmatrix} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(45^\circ + 30^\circ) &= \cos(75^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin(45^\circ + 30^\circ) &= \sin(75^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.17 今的位置 (x_2, y_2) が θ 回転する前の位置 (x_1, y_1) を求めよ。

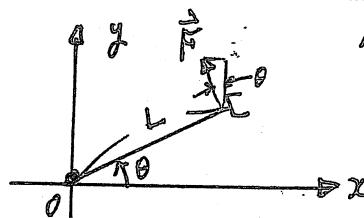
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \text{inv} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

たとえば、 $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = 30^\circ$ のとき

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ とす}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

2.18 回転モーメントとは？ オイラー(Euler)の運動方程式



Arm の長さ L で先端に腕に直角の方向に F の力がかかる。Robot Arm を回転させようとする。

この時の回転モーメント $\vec{N} = \vec{L} \times \vec{F}$ (外積) となる。

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ L \cos \theta & L \sin \theta & 0 \\ -F \sin \theta & F \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{L} = (L \cos \theta, L \sin \theta)$$

$$\vec{F} = (-F \sin \theta, F \cos \theta) \text{ とする。}$$

$$\vec{N} = (L)(F) \vec{e}_z \text{ となる。}$$

① $\vec{F} = F \vec{e}_x$ の場合

$$\vec{N} = \vec{L} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ L \cos \theta & L \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -(L(F)) \sin \theta \vec{e}_z \text{ となる。}$$

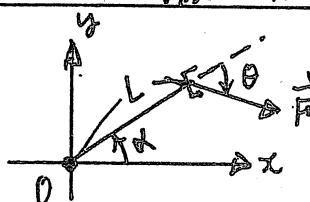
$$L = 1m, F = 10N \text{ の場合}$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\vec{N} = -(1)(10) \frac{1}{\sqrt{2}} = -5\sqrt{2} \vec{e}_z \quad \left(N = 5\sqrt{2} \text{ Newton}\cdot\text{m} \right)$$

Arm に沿って角度 θ で力がかかる。

回転させる。



$$\vec{L} = (L \cos \theta, L \sin \theta)$$

$$\vec{F} = (F \cos(\theta-\alpha), F \sin(\theta-\alpha))$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{N} = \vec{L} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ L \cos \theta & L \sin \theta & 0 \\ F \cos(\theta-\alpha) & F \sin(\theta-\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

dには直角である

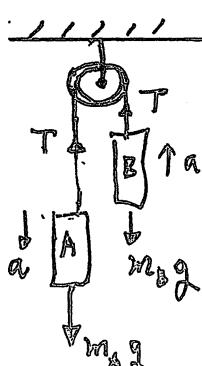
$$\vec{N} = (L(F)) \{ \cos \theta \sin(\theta-\alpha) - \sin \theta \cos(\theta-\alpha) \} \vec{e}_z = -(L(F)) \sin \theta \vec{e}_z \text{ となる。}$$

$$\cos A \sin B - \sin A \cos B = \sin(B-A)$$

$$L = 1m, F = 10N, \theta = 60^\circ \text{ とす } \vec{N} = -(1)\frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3}$$

2.19 ニュートン(Newton)の運動方程式 (滑車の問題)

滑車Aは固定され、



$$M_A = 10kg, M_B = 4kg \text{ とする。}$$

$$g = 9.8m/sec^2 \text{ (重力加速度)}$$

$$M_A a = M_A g - T \quad (T = 10N)$$

$$M_A a = 2T \quad (T = 10N)$$

$$T = (M_A g - M_A a) = M_B a + M_B g - M_B a$$

$$(M_A + M_B) a = (M_A - M_B) g \quad a = \frac{M_A - M_B}{M_A + M_B} g$$

$$T = \frac{M_B(M_A - M_B)}{M_A + M_B} g + M_B g = \frac{2M_A M_B}{M_A + M_B} g$$

$$a = \frac{(10-4)}{(10+4)} (9.8) = 4.2 m/sec^2 \quad T = \frac{(4)(10)(4.2)}{14} (9.8) = \frac{40}{7} (9.8) = 56N$$